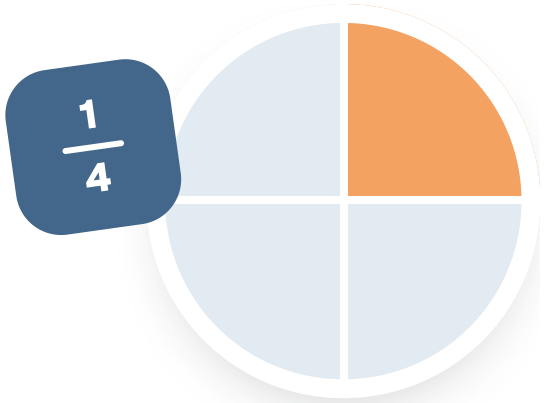
DYS+ Campus



Übungsheft · Mathe · Klasse 13

Zufallsgrößen, Erwartungswert und Streuung

Erklärungen, 28 Aufgaben in drei Stufen und alle Lösungen mit Rechenweg.

Name _____ **Datum** _____

Das lernst du

- Ich ordne Ergebnissen Zahlenwerte zu und stelle Verteilungen auf.
- Ich berechne Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung.
- Ich deute die Kenngrößen im Sachzusammenhang und vergleiche Spiele.

So arbeitest du mit dem Heft

●○○ **Basis** zum Einstieg

●●○ **Standard** zum Üben

●●● **Plus** zum Weiterdenken

Du musst nicht alles machen. Fang bei Basis an. Die Lösungen stehen hinten im Heft.

Noch unsicher?

Scanne den Code. Dort wird das Thema Schritt für Schritt erklärt.

dysplus.de/lernen/gymnasium/klasse-13/mathe/zufallsgroessen-und-erwartungswert/was-ist-eine-zufallsgroesse

Kurz erklärt

Merksatz: Zufallsgröße X: ordnet jedem Ergebnis eine Zahl zu. Verteilung: Werte x mit P(X = x), Summe 1.

Merksatz: E(X) = Summe aus $x \cdot P(X = x)$. Var(X) = Summe aus $(x - \mu)^2 \cdot P(X = x)$. $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$.

Rad mit 0 € ($\frac{1}{2}$), 3 € ($\frac{1}{3}$), 6 € ($\frac{1}{6}$)

1. $E(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 0 + 1 + 1 = 2$.
2. $\text{Var}(X) = (0 - 2)^2 \cdot \frac{1}{2} + (3 - 2)^2 \cdot \frac{1}{3} + (6 - 2)^2 \cdot \frac{1}{6} = 2 + \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = 5$.
3. $\sigma = \sqrt{5} \approx 2{,}24$.

Typischer Fehler: Der Erwartungswert muss kein möglicher Wert sein, und ein Spiel ist nur fair, wenn der erwartete Gewinn (Auszahlung minus Einsatz) 0 ist.

●○○ Basis

Zufallsgröße und Verteilung

1 Zähle die Ergebnisse.

a) Zwei Münzen, X = Anzahl Zahl. Zu X = 1 gehören _____ Ergebnisse.

b) Ein Würfel, X = Augenzahl. Zu X ≥ 5 gehören _____ Ergebnisse.

c) Zwei Würfel, S = Augensumme. Zu S = 7 gehören _____ von 36 Ergebnissen.

d) Drei Münzen, X = Anzahl Zahl. Zu X = 3 gehört _____ Ergebnis.

2 Bestimme die fehlende Wahrscheinlichkeit.

a) P(X = 1) = 0,2; P(X = 2) = 0,5; P(X = 3) = _____

b) P(X = 0) = 0,1; P(X = 1) = 0,4; P(X = 2) = 0,3; P(X = 3) = _____

c) P(X = 0) = 0,5; P(X = 1) = 0,25; P(X = 2) = _____

3 Kreuze an: Ist die Tabelle eine Wahrscheinlichkeitsverteilung?

a) Die Wahrscheinlichkeiten 0,2; 0,3; 0,6 _____ eine Verteilung. ☐ **sind** ☐ **sind keine**

b) Die Wahrscheinlichkeiten 0,5; 0,25; 0,25 _____ eine Verteilung. ☐ **sind keine** ☐ **sind**

c) Die Wahrscheinlichkeiten 0,4; 0,4; 0,1 _____ eine Verteilung. ☐ **sind keine** ☐ **sind**

●●○ Standard

Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung

4 Berechne den Erwartungswert E(X).

a) Werte 0, 1, 2 mit P = 0,5; 0,3; 0,2. E(X) = _____

b) Werte 1, 2, 3, 4 mit P = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4. E(X) = _____

c) Gewinn 5 € mit P = 0,2, sonst 0 €. E(X) = _____ €

d) Ein Rad zahlt 0 € ($\frac{1}{2}$), 3 € ($\frac{1}{3}$), 6 € ($\frac{1}{6}$) aus. Das Spiel ist fair bei einem Einsatz von _____ €.

5 Berechne Erwartungswert und Varianz.

a) Werte 0 und 4, beide mit P = 0,5. μ = _____ und Var(X) = _____

b) Werte −1 und 1, beide mit P = 0,5. μ = _____ und Var(X) = _____

c) Werte 1, 2, 3 mit P = 0,2; 0,5; 0,3 und μ = 2,1. σ = _____

6 Rechne und schreibe einen Antwortsatz. Alle Werte sind ausgedacht (Modell).

a) Tombola mit 500 Losen zu je 2 €. Ein Los zahlt 50 € aus, 4 Lose je 10 €, 20 Lose je 2 €, der Rest nichts. Wie hoch ist die erwartete Auszahlung pro Los und der erwartete Gewinn des Veranstalters pro Los?

Antwort:

b) Ein Spiel kostet 3 € und zahlt mit der Wahrscheinlichkeit 0,25 einen Betrag von 8 € aus. Ist es fair? Begründe.

Antwort:

7 Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe die richtige Fassung auf.

a) Der Erwartungswert ist der wahrscheinlichste Wert. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

b) Die Varianz ist nie negativ. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

c) Bei einer größeren Standardabweichung streuen die Werte stärker um den Erwartungswert. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

d) Ein Spiel mit negativem Erwartungswert des Gewinns verliert man bei jedem Spiel. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

●●● Plus

Lineare Änderungen und Risiko

8 X hat E(X) = 3 und σ(X) = 2. Berechne.

a) Y = 2X + 1: E(Y) = _____ und Var(Y) = _____

b) Y = −X + 4: E(Y) = _____ und σ(Y) = _____

9 Rechne und deute. Alle Werte sind ausgedacht (Modell).

a) Spiel A zahlt 10 € mit P = 0,1, sonst 0 €. Spiel B zahlt 2 € mit P = 0,5, sonst 0 €. Vergleiche Erwartungswert und Standardabweichung.

Antwort:

b) Spiel C zahlt 5 € mit P = 0,2, sonst 0 €. Berechne E und σ.

Antwort:

c) Ein Spiel zahlt 0 € mit P = 0,7 und 10 € mit P = 0,3. Berechne E und σ auf zwei Nachkommastellen.

Antwort:

Kannst du das schon?

Kreuze an, wie sicher du dich fühlst. Hier gibt es kein Richtig oder Falsch.

Ich kann …	sicher	fast	noch nicht
Ich ordne Ergebnissen Zahlenwerte zu und stelle Verteilungen auf.	☐	☐	☐
Ich berechne Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung.	☐	☐	☐
Ich deute die Kenngrößen im Sachzusammenhang und vergleiche Spiele.	☐	☐	☐

Tipp: Bei „noch nicht“ schau dir „Kurz erklärt“ vorne im Heft noch einmal an oder scanne den Code auf dem Deckblatt. Dann probierst du die Aufgaben noch einmal.

Lösungen

Erst selbst rechnen, dann vergleichen. Bei den Rechenaufgaben steht der Rechenweg dabei.

●○○ Basis: Zufallsgröße und Verteilung

1 Zähle die Ergebnisse.

a) **Zwei Münzen, X = Anzahl Zahl. Zu X = 1 gehören 2 Ergebnisse.**

→ WZ und ZW.

b) **Ein Würfel, X = Augenzahl. Zu X ≥ 5 gehören 2 Ergebnisse.**

→ 5 und 6.

c) **Zwei Würfel, S = Augensumme. Zu S = 7 gehören 6 von 36 Ergebnissen.**

→ (1|6), (2|5), (3|4), (4|3), (5|2), (6|1).

d) **Drei Münzen, X = Anzahl Zahl. Zu X = 3 gehört 1 Ergebnis.**

→ Nur ZZZ.

2 Bestimme die fehlende Wahrscheinlichkeit.

a) **P(X = 1) = 0,2; P(X = 2) = 0,5; P(X = 3) = 0,3**

→ 1 – 0,2 – 0,5 = 0,3.

b) **P(X = 0) = 0,1; P(X = 1) = 0,4; P(X = 2) = 0,3; P(X = 3) = 0,2**

→ 1 – 0,8 = 0,2.

c) **P(X = 0) = 0,5; P(X = 1) = 0,25; P(X = 2) = 0,25**

→ 1 – 0,75 = 0,25.

3 Kreuze an: Ist die Tabelle eine Wahrscheinlichkeitsverteilung?

a) **sind keine**

→ Die Summe ist 1,1.

b) **sind**

→ Die Summe ist 1.

c) **sind keine**

→ Die Summe ist 0,9.

●●○ Standard: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung

4 Berechne den Erwartungswert E(X).

a) **Werte 0, 1, 2 mit P = 0,5; 0,3; 0,2. E(X) = 0,7**

→ 0 + 0,3 + 0,4 = 0,7.

b) **Werte 1, 2, 3, 4 mit P = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4. E(X) = 3**

→ 0,1 + 0,4 + 0,9 + 1,6 = 3.

c) **Gewinn 5 € mit P = 0,2, sonst 0 €. E(X) = 1 €**

→ 5 · 0,2 = 1.

d) **Ein Rad zahlt 0 € ($\frac{1}{2}$), 3 € ($\frac{1}{3}$), 6 € ($\frac{1}{6}$) aus. Das Spiel ist fair bei einem Einsatz von 2 €.**

→ E = 2, Gewinn = 2 – Einsatz = 0.

5 Berechne Erwartungswert und Varianz.

a) **Werte 0 und 4, beide mit P = 0,5. μ = 2 und Var(X) = 4**

→ μ = 2. $(0-2)^2 \cdot 0{,}5 + (4-2)^2 \cdot 0{,}5 = 2 + 2 = 4$.

b) **Werte –1 und 1, beide mit P = 0,5. μ = 0 und Var(X) = 1**

→ μ = 0. 1 · 0,5 + 1 · 0,5 = 1.

c) **Werte 1, 2, 3 mit P = 0,2; 0,5; 0,3 und μ = 2,1. σ = 0,7**

→ Var = 0,49, σ = √0,49 = 0,7.

6 Rechne und schreibe einen Antwortsatz. Alle Werte sind ausgedacht (Modell).

a) **0,26 € Auszahlung, 1,74 € Gewinn pro Los**

→ Gesamtauszahlung: 50 + 4 · 10 + 20 · 2 = 50 + 40 + 40 = 130 €.

→ Pro Los: $\frac{130}{500}$ = 0,26 €.

→ Gewinn des Veranstalters: 2 – 0,26 = 1,74 € pro Los.

b) **Nein, E(Gewinn) = –1 €**

→ Erwartete Auszahlung: 8 · 0,25 = 2 €.

→ Erwarteter Gewinn: 2 – 3 = –1 €. Das Spiel ist nicht fair, man verliert im Mittel 1 € pro Spiel.

7 Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe die richtige Fassung auf.

a) **Stimmt nicht. Richtig: Er ist ein Mittelwert auf lange Sicht und muss kein möglicher Wert sein.**

b) **Stimmt.**

c) **Stimmt.**

d) **Stimmt nicht. Richtig: Der Erwartungswert gilt im Mittel vieler Spiele, einzelne Spiele können gewonnen werden.**

●●● Plus: Lineare Änderungen und Risiko

8 **X hat E(X) = 3 und σ(X) = 2. Berechne.**

a) **Y = 2X + 1: E(Y) = 7 und Var(Y) = 16**

→ E(Y) = 2 · 3 + 1 = 7. Var(Y) = $2^2 \cdot 2^2 = 16$.

b) **Y = −X + 4: E(Y) = 1 und σ(Y) = 2**

→ E(Y) = −3 + 4 = 1. σ(Y) = |−1| · 2 = 2.

9 **Rechne und deute. Alle Werte sind ausgedacht (Modell).**

a) **E = 1 € bei beiden; σ(A) = 3 €, σ(B) = 1 €**

→ E(A) = 1, E(B) = 1.

→ Var(A) = 100 · 0,1 − 1 = 9, also σ(A) = 3. Var(B) = 4 · 0,5 − 1 = 1, also σ(B) = 1.

→ Beide zahlen im Mittel 1 €, A ist riskanter.

b) **E = 1 €, σ = 2 €**

→ E = 5 · 0,2 = 1.

→ Var = 25 · 0,2 − 1 = 4, also σ = 2.

c) **E = 3 €, σ ≈ 4,58 €**

→ E = 10 · 0,3 = 3.

→ Var = 100 · 0,3 − 9 = 21.

→ σ = √21 ≈ 4,58.