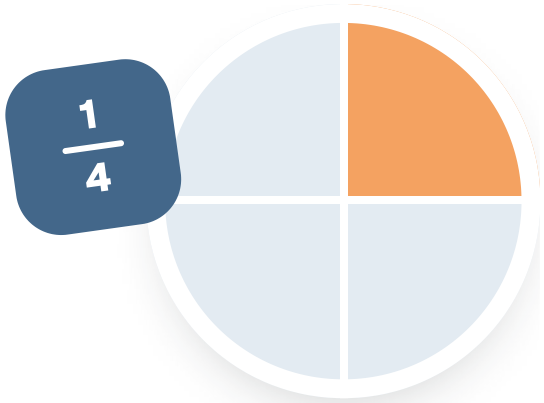
DYS+ Campus



Übungsheft · Mathe · Klasse 13

Umkehrfunktion und Logarithmus

Erklärungen, 40 Aufgaben in drei Stufen und alle Lösungen mit Rechenweg.

Name _____ **Datum** _____

Das lernst du

- Ich bestimme die Umkehrfunktion einfacher Funktionen.
- Ich erkläre die Wurzelfunktion als Umkehrfunktion von x^2 ($x \geq 0$).
- Ich löse Exponentialgleichungen mit ln.
- Ich kenne $(\ln x)' = 1/x$ und nutze ln als Stammfunktion von $1/x$.

So arbeitest du mit dem Heft

●○○ **Basis** zum Einstieg

●●○ **Standard** zum Üben

●●● **Plus** zum Weiterdenken

Du musst nicht alles machen. Fang bei Basis an. Die Lösungen stehen hinten im Heft.

Noch unsicher?

Scanne den Code. Dort wird das Thema Schritt für Schritt erklärt.

dysplus.de/lernen/gymnasium/klasse-13/mathe/umkehrfunktion-und-logarithmus/was-ist-eine-umkehrfunktion

Kurz erklärt

Merksatz: f^{-1} macht f rückgängig. $D(f^{-1}) = W(f)$, $W(f^{-1}) = D(f)$. Der Graph von f^{-1} ist die Spiegelung von f an $y = x$. ln ist die Umkehrfunktion von e^x. $(\ln x)' = 1/x$.

Wichtige Umkehrungen

f	f^{-1}	Bedingung
$2x + 3$	$(x - 3)/2$	alle x
x^2	$\sqrt{x}$	$x \geq 0$
e^x	$\ln x$	$x > 0$ für ln

Umkehrfunktion von $f(x) = 4x - 2$

1. $y = 4x - 2$.
2. Plus 2: $y + 2 = 4x$.
3. Durch 4: $x = (y + 2)/4$.
4. Variablen tauschen: $f^{-1}(x) = (x + 2)/4$.

Tipp: Prüfe jede Umkehrfunktion mit einer Probe: $f(f^{-1}(x)) = x$.

Typischer Fehler: f^{-1} ist nicht der Kehrwert $1/f$. Und $\ln(a + b)$ ist nicht $\ln a + \ln b$.

●○○ Basis

Umkehrfunktionen verstehen

1 Berechne f^{-1} an der angegebenen Stelle, also das x mit f(x) = y.

a) f(x) = 3x + 1. $f^{-1}(10)$ = _____

b) f(x) = x – 5. $f^{-1}(2)$ = _____

c) f(x) = 2x – 8. $f^{-1}(0)$ = _____

d) f(x) = x/2. $f^{-1}(3)$ = _____

e) F = 1,8·C + 32. Zu 50 °F gehören _____ °C

2 Kreuze an.

a) Der Definitionsbereich von f^{-1} ist der _____ von f.

☐ **Definitionsbereich** ☐ **Wertebereich**

b) Der Graph von f^{-1} entsteht durch Spiegelung von f an _____.

☐ **der x-Achse** ☐ **der Geraden y = x**

c) $f^{-1}(x)$ bedeutet _____.

☐ **Kehrwert 1/f(x)** ☐ **Umkehrfunktion**

3 Gib die Umkehrfunktion an.

a) f(x) = 4x – 2

Antwort:

b) $f(x) = x/3 + 1$

Antwort:

●●○ Standard

Wurzel als Umkehrfunktion und Exponentialgleichungen

4 Berechne.

a) $f(x) = x^2$ für $x \geq 0$. $f^{-1}(49) =$ _____

b) $f(x) = x^2 + 3$ für $x \geq 0$. $f^{-1}(12) =$ _____

c) $f(x) = (x + 1)^2$ für $x \geq -1$ hat $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 1$. $f^{-1}(16) =$ _____

d) Der Punkt (5 | 25) liegt auf dem Graphen von x^2 ($x \geq 0$). Der gespiegelte Punkt hat die erste Koordinate _____

5 Kreuze an.

a) Die Funktion $f(x) = x^2$ auf ganz $\mathbb{R}$ ist _____ umkehrbar. ☐ **genau** ☐ **nicht**

b) $\sqrt{((-3)^2)} =$ _____ ☐ **−3** ☐ **3**

c) Der Wertebereich von $\sqrt{x}$ ist _____. ☐ **alle reellen Zahlen** ☐ **$y \geq 0$**

6 Löse mit dem Taschenrechner (zwei Nachkommastellen).

a) $e^x = 7$. $x \approx$ _____

b) e^(2x) = 10. $x \approx$ _____

c) e^(−x) = 0,5. $x \approx$ _____

d) 4·e^(0,1x) = 20. $x \approx$ _____

e) $2^x = 100$. $x \approx$ _____

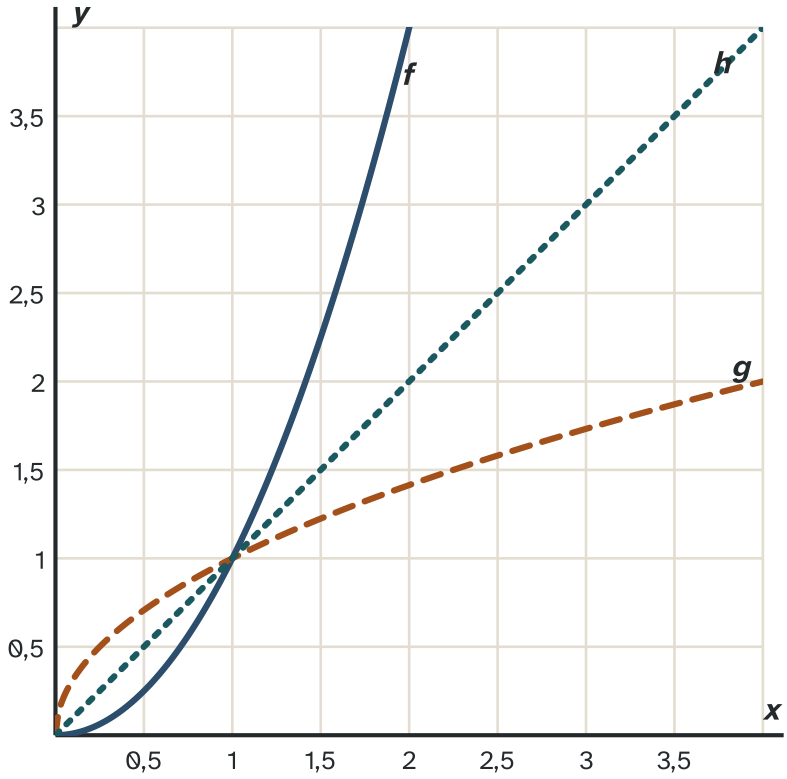
7 Modell (fiktiv).

a) N(t) = 200·e^(0,03t), t in Stunden. Wann ist N = 500? Gib die Zeit auf zwei Nachkommastellen an.

Antwort:

8 Spiegele den Punkt.

a)



Der Punkt (2 | 4) liegt auf dem Graphen von x^2. Welcher Punkt liegt auf dem Graphen von $\sqrt{x}$?

9 **Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe die richtige Fassung auf.**

a) $f^{-1}(x)$ ist dasselbe wie $1/f(x)$. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

---

b) Die Gleichung $e^x = -2$ hat keine Lösung. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

---

c) Aus 2·e^x + 3 = 11 folgt x = ln 11 – ln 3. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

●●● Plus

Umkehrbarkeit und Logarithmusfunktion (vor allem für den Leistungskurs)

10 Umkehrfunktionen berechnen.

a) $f(x) = x^3 + 1$. $f^{-1}(28) =$ _____

b) $f(x) = x^2 - 6x$ für $x \geq 3$ hat $f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{(x + 9)}$. $f^{-1}(7) =$ _____

c) $f(x) = 2x^3$. $f^{-1}(16) =$ _____

11 Kreuze an.

a) Ist $f'(x) > 0$ für alle x im Intervall, so ist f dort ☐ **nicht umkehrbar** ☐ **umkehrbar** _____.

b) Der Definitionsbereich von ln ist _____. ☐ **x > 0** ☐ **alle reellen Zahlen**

12 Rechne mit ln.

a) $\ln(e^5) =$ _____

b) e^(ln 3) = _____

c) ln 8 ≈ _____ (zwei Nachkommastellen, ln 2 ≈ 0,693)

13 Ableiten und integrieren.

a) $f(x) = \ln x + x$. $f'(2) =$ _____ (Dezimalzahl)

b) $f(x) = x \cdot \ln x - x$. $f'(e) =$ _____

c) Das Integral von 1 bis e über 1/x dx ist _____

d) Das Integral von 2 bis 8 über 1/x dx ≈ _____ (zwei Nachkommastellen)

14 Begründe.

a) Zeige mit der Kettenregel, dass (ln x)′ = 1/x gilt. Nutze e^(ln x) = x.

Antwort:

Kannst du das schon?

Kreuze an, wie sicher du dich fühlst. Hier gibt es kein Richtig oder Falsch.

Ich kann …	sicher	fast	noch nicht
Ich bestimme die Umkehrfunktion einfacher Funktionen.	☐	☐	☐
Ich erkläre die Wurzelfunktion als Umkehrfunktion von x^2 ($x \geq 0$).	☐	☐	☐
Ich löse Exponentialgleichungen mit ln.	☐	☐	☐
Ich kenne $(\ln x)' = 1/x$ und nutze ln als Stammfunktion von $1/x$.	☐	☐	☐

Tipp: Bei „noch nicht“ schau dir „Kurz erklärt“ vorne im Heft noch einmal an oder scanne den Code auf dem Deckblatt. Dann probierst du die Aufgaben noch einmal.

Lösungen

Erst selbst rechnen, dann vergleichen. Bei den Rechenaufgaben steht der Rechenweg dabei.

●○○ Basis: Umkehrfunktionen verstehen

1 Berechne f^{-1} an der angegebenen Stelle, also das x mit f(x) = y.

a) **$f(x) = 3x + 1$. $f^{-1}(10) = 3$**

→ $3x + 1 = 10$ ergibt $x = 3$.

b) **$f(x) = x - 5$. $f^{-1}(2) = 7$**

→ $x - 5 = 2$ ergibt $x = 7$.

c) **$f(x) = 2x - 8$. $f^{-1}(0) = 4$**

→ $2x - 8 = 0$ ergibt $x = 4$.

d) **$f(x) = x/2$. $f^{-1}(3) = 6$**

→ $x/2 = 3$ ergibt $x = 6$.

e) **$F = 1{,}8 \cdot C + 32$. Zu 50 °F gehören 10 °C**

→ $1{,}8 \cdot C = 18$, also $C = 10$.

2 Kreuze an.

a) **Wertebereich**

→ Die Rollen von Eingabe und Ausgabe sind vertauscht.

b) **der Geraden $y = x$**

→ Dabei werden die Koordinaten vertauscht.

c) **Umkehrfunktion**

→ Das hochgestellte –1 ist hier kein Exponent.

3 Gib die Umkehrfunktion an.

a) **$f^{-1}(x) = (x + 2)/4$**

→ $y = 4x - 2$.

→ $y + 2 = 4x$, also $x = (y + 2)/4$.

b) **$f^{-1}(x) = 3x - 3$**

→ $y = x/3 + 1$, also $y - 1 = x/3$.

→ $x = 3(y - 1) = 3y - 3$.

●●○ Standard: Wurzel als Umkehrfunktion und Exponentialgleichungen

4 Berechne.

a) **$f(x) = x^2$ für $x \geq 0$. $f^{-1}(49) = 7$**

→ $\sqrt{49} = 7$.

b) **$f(x) = x^2 + 3$ für $x \geq 0$. $f^{-1}(12) = 3$**

→ $x^2 = 9$, $x = 3$.

c) **$f(x) = (x + 1)^2$ für $x \geq -1$ hat $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 1$. $f^{-1}(16) = 3$**

→ $\sqrt{16} - 1 = 3$.

d) **Der Punkt (5 | 25) liegt auf dem Graphen von x^2 ($x \geq 0$). Der gespiegelte Punkt hat die erste Koordinate 25**

→ Die Koordinaten werden vertauscht: (25 | 5).

5 Kreuze an.

a) nicht

→ Die Werte 3 und −3 liefern beide 9.

b) 3

→ $\sqrt{(x^2)} = |x|$.

c) $y \geq 0$

→ Eine Wurzel ist nie negativ.

6 Löse mit dem Taschenrechner (zwei Nachkommastellen).

a) $e^x = 7$. $x \approx 1{,}95$

→ $x = \ln 7 \approx 1{,}9459$.

b) e^(2x) = 10. $x \approx 1{,}15$

→ $2x = \ln 10 \approx 2{,}3026$, also $x \approx 1{,}15$.

c) e^(−x) = 0,5. $x \approx 0{,}69$

→ $-x = \ln 0{,}5 = -0{,}693$, also $x \approx 0{,}69$.

d) 4·e^(0,1x) = 20. $x \approx 16{,}09$

→ $e^{(0{,}1x)} = 5$, also $0{,}1x = \ln 5 \approx 1{,}609$ und $x \approx 16{,}09$.

e) $2^x = 100$. $x \approx 6{,}64$

→ $x = \ln 100 / \ln 2 \approx 4{,}605/0{,}693 \approx 6{,}64$.

7 Modell (fiktiv).

a) t ≈ 30,54 Stunden

→ $500 = 200 \cdot e^{(0{,}03t)}$, also $e^{(0{,}03t)} = 2{,}5$.

→ $0{,}03t = \ln 2{,}5 \approx 0{,}9163$.

→ $t \approx 30{,}54$.

8 Spiegele den Punkt.

a) (4 | 2)

9 Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe die richtige Fassung auf.

a) Stimmt nicht. Richtig: f^{-1} ist die Umkehrfunktion, nicht der Kehrwert.

b) Stimmt.

c) Stimmt nicht. Richtig: Erst isolieren: 2·e^x = 8, e^x = 4, x = ln 4 ≈ 1,39.

●●● Plus: Umkehrbarkeit und Logarithmusfunktion (vor allem für den Leistungskurs)

10 Umkehrfunktionen berechnen.

a) $f(x) = x^3 + 1$. $f^{-1}(28) = 3$

→ $x^3 = 27$, $x = 3$.

b) $f(x) = x^2 - 6x$ für $x \geq 3$ hat $f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{(x + 9)}$. $f^{-1}(7) = 7$

→ $3 + \sqrt{16} = 7$.

c) $f(x) = 2x^3$. $f^{-1}(16) = 2$

→ $2x^3 = 16$, $x^3 = 8$, $x = 2$.

11 Kreuze an.

a) umkehrbar

→ Streng monoton heißt: jeder Wert nur einmal.

b) $x > 0$

→ e^x nimmt nur positive Werte an.

12 Rechne mit ln.

a) $\ln(e^5) = 5$

→ ln(e^x) = x.

b) e^(ln 3) = 3

→ e^(ln x) = x.

c) ln 8 ≈ 2,08 (zwei Nachkommastellen, ln 2 ≈ 0,693)

→ ln 8 = 3·ln 2 ≈ 2,079.

13 Ableiten und integrieren.

a) f(x) = ln x + x. f′(2) = 1,5 (Dezimalzahl)

→ f′(x) = 1/x + 1. f′(2) = 1,5.

b) f(x) = x·ln x − x. f′(e) = 1

→ f′(x) = ln x + 1 − 1 = ln x. f′(e) = 1.

c) Das Integral von 1 bis e über 1/x dx ist 1

→ ln e − ln 1 = 1.

d) Das Integral von 2 bis 8 über 1/x dx ≈ 1,39 (zwei Nachkommastellen)

→ ln 8 − ln 2 = ln 4 ≈ 1,39.

14 Begründe.

a) Aus e^(ln x) · (ln x)′ = 1 und e^(ln x) = x folgt (ln x)′ = 1/x.

→ Beide Seiten von e^(ln x) = x ableiten.

→ Links Kettenregel: e^(ln x) · (ln x)′. Rechts: 1.

→ x · (ln x)′ = 1, also (ln x)′ = 1/x.