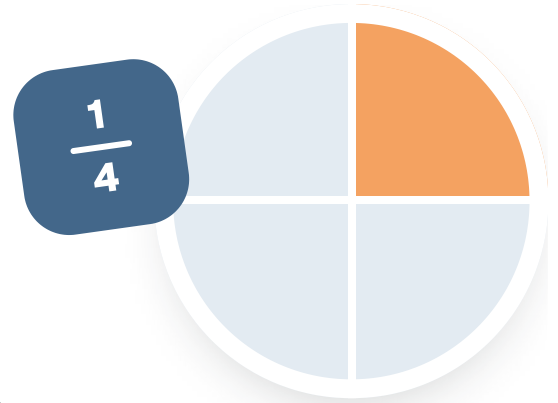




Übungsheft • Mathe • Klasse 10

Trigonometrie im Dreieck

Erklärungen, 48 Aufgaben in drei Stufen und alle
Lösungen mit Rechenweg.

Name _____ Datum _____

Das lernst du

- Ich benenne Gegenkathete, Ankathete und Hypotenuse.
- Ich berechne Sinus, Kosinus und Tangens.
- Ich berechne Seiten und Winkel im rechtwinkligen Dreieck.
- Ich wende den Kosinussatz an.

So arbeitest du mit dem Heft

- **Basis** zum Einstieg
- **Standard** zum Üben
- **Plus** zum Weiterdenken

Du musst nicht alles machen.
Fang bei Basis an. Die Lösungen
stehen hinten im Heft.



Noch unsicher?

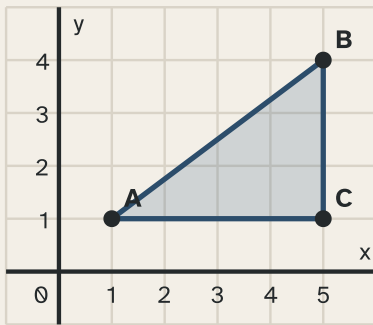
Scanne den Code. Dort wird das Thema Schritt für Schritt erklärt.

dysplus.de/lernen/realschule/klasse-10/mathe/trigonometrie/gegenkathete-ankathete-hypotenuse

Kurz erklärt

Merksatz: $\sin \alpha = \text{Gegenkathete} : \text{Hypotenuse}$. $\cos \alpha = \text{Ankathete} : \text{Hypotenuse}$. $\tan \alpha = \text{Gegenkathete} : \text{Ankathete}$. Der Rechner steht auf Grad (DEG).

Das Dreieck mit 3, 4 und 5



Für α bei A: Gegenkathete 3, Ankathete 4, Hypotenuse 5. Dann ist $\sin \alpha = 0,6$, $\cos \alpha = 0,8$ und $\tan \alpha = 0,75$.

Welche Formel passt?

gegeben	gesucht	Formel
H	G	$G = H \cdot \sin \alpha$
H	A	$A = H \cdot \cos \alpha$
A	G	$G = A \cdot \tan \alpha$
zwei Seiten	Winkel	$\alpha = \sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ oder $\tan^{-1}$ des Verhältnisses

Seite berechnen

- 1 Hypotenuse 5 m, $\alpha = 20^\circ$.
- 2 $G = 5 \cdot \sin 20^\circ \approx 5 \cdot 0,342$.
- 3 $G \approx 1,71$ m.

Kosinussatz

- 1 $a = 5, b = 8, \gamma = 60^\circ.$
- 2 $c^2 = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 0,5 = 49.$
- 3 $c = 7.$

Typischer Fehler: Steht der Rechner auf Bogenmaß (RAD), sind alle Ergebnisse falsch. Prüfe: $\sin 30^\circ$ muss 0,5 ergeben.

Seiten benennen und Verhältnisse

1 Im Dreieck ABC liegt der rechte Winkel bei C. Kreuze an.

- a) Von α (bei A) ist die Seite BC die ☐ Hypotenuse ☐ Gegenkathete ☐ Ankathete
_____.
- b) Von α (bei A) ist die Seite AC die ☐ Gegenkathete ☐ Hypotenuse ☐ Ankathete
_____.
- c) Die Seite AB ist die _____. ☐ Gegenkathete ☐ Hypotenuse ☐ Ankathete
- d) Von β (bei B) ist die Seite AC die ☐ Gegenkathete ☐ Ankathete ☐ Hypotenuse
_____.
- e) Von β (bei B) ist die Seite BC die ☐ Ankathete ☐ Hypotenuse ☐ Gegenkathete
_____.
- f) Im Dreieck PQR liegt der rechte Winkel bei R. Von dem Winkel bei P ist QR die _____. ☐ Hypotenuse ☐ Gegenkathete ☐ Ankathete

2 Berechne das Verhältnis als Dezimalzahl.

- a) Gegenkathete 3, Ankathete 4, Hypotenuse 5: $\sin \alpha =$ _____
- b) Gegenkathete 3, Ankathete 4, Hypotenuse 5: $\cos \alpha =$ _____
- c) Gegenkathete 3, Ankathete 4, Hypotenuse 5: $\tan \alpha =$ _____
- d) Gegenkathete 6, Ankathete 8, Hypotenuse 10: $\sin \alpha =$ _____
- e) Gegenkathete 9, Ankathete 12, Hypotenuse 15: $\cos \alpha =$ _____
- f) Gegenkathete 7, Ankathete 24, Hypotenuse 25: $\sin \alpha =$ _____

3 Kreuze an.

- a) $\sin \alpha$ ist das Verhältnis Gegenkathete zu _____ ☐ Ankathete ☐ Hypotenuse
- b) $\cos \alpha$ ist das Verhältnis Ankathete zu _____ ☐ Hypotenuse ☐ Gegenkathete
- c) $\tan \alpha$ ist das Verhältnis Gegenkathete zu _____ ☐ Hypotenuse ☐ Ankathete

Seiten und Winkel berechnen

4 Es gilt $\sin 30^\circ = 0,5$, $\cos 60^\circ = 0,5$ und $\tan 45^\circ = 1$. Berechne die Seite.

- a) Hypotenuse 14 cm, $\alpha = 30^\circ$: Gegenkathete $G = H \cdot \sin 30^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$ cm
- b) Hypotenuse 18 cm, $\alpha = 60^\circ$: Ankathete $A = H \cdot \cos 60^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$ cm
- c) Ankathete 9 cm, $\alpha = 45^\circ$: Gegenkathete $G = A \cdot \tan 45^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$ cm
- d) Hypotenuse 20 cm, $\alpha = 30^\circ$: Gegenkathete = $\underline{\hspace{2cm}}$ cm
- e) Gegenkathete 6 cm, $\alpha = 30^\circ$: Hypotenuse $H = G : \sin 30^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$ cm

5 Berechne die Seite, gerundet auf Zehntel. Stelle den Rechner auf Grad.

- a) Hypotenuse 12 cm, $\alpha = 40^\circ$: Gegenkathete $\approx \underline{\hspace{2cm}}$ cm
- b) Hypotenuse 10 cm, $\alpha = 35^\circ$: Ankathete $\approx \underline{\hspace{2cm}}$ cm
- c) Ankathete 8 cm, $\alpha = 35^\circ$: Gegenkathete $\approx \underline{\hspace{2cm}}$ cm
- d) Hypotenuse 15 cm, $\alpha = 25^\circ$: Gegenkathete $\approx \underline{\hspace{2cm}}$ cm
- e) Ankathete 20 cm, $\alpha = 50^\circ$: Gegenkathete $\approx \underline{\hspace{2cm}}$ cm

6 Berechne den Winkel α , gerundet auf ganze Grad.

- a) Gegenkathete 5 cm, Hypotenuse 10 cm: $\alpha \approx \underline{\hspace{2cm}}^\circ$
- b) Ankathete 6 cm, Hypotenuse 10 cm: $\alpha \approx \underline{\hspace{2cm}}^\circ$
- c) Gegenkathete 3 cm, Ankathete 4 cm: $\alpha \approx \underline{\hspace{2cm}}^\circ$
- d) Gegenkathete 8 cm, Hypotenuse 10 cm: $\alpha \approx \underline{\hspace{2cm}}^\circ$
- e) Gegenkathete 5 cm, Ankathete 12 cm: $\alpha \approx \underline{\hspace{2cm}}^\circ$

- a) Die Hypotenuse liegt dem rechten Winkel gegenüber. ☐ stimmt ☐ stimmt nicht
-

- b) Es gilt $\sin \alpha = \text{Ankathete} : \text{Hypotenuse}$. ☐ stimmt ☐ stimmt nicht
-

- c) Sinus und Kosinus eines spitzen Winkels sind immer kleiner als 1. ☐ stimmt ☐ stimmt nicht
-

- d) Ein größeres Dreieck mit demselben Winkel hat einen größeren Sinus. ☐ stimmt ☐ stimmt nicht
-

- e) Eine Steigung von 10 % entspricht einem Winkel von 10° . ☐ stimmt ☐ stimmt nicht
-

- f) Der Taschenrechner muss für diese Aufgaben auf Grad (DEG) stehen. ☐ stimmt ☐ stimmt nicht
-

Sachaufgaben, Kosinussatz und Begründen

8 Rechne und schreibe einen Antwortsatz.

- a) Du stehst 20 m vor einem Baum. Die Spitze siehst du unter 35° . Deine Augen sind 1,6 m hoch. Wie hoch ist der Baum, gerundet auf Zehntel?

Antwort:

- b) Eine Leiter ist 4 m lang und steht unter 75° zum Boden. Wie hoch reicht sie und wie weit steht der Fuß von der Wand, gerundet auf Hundertstel?

Antwort:

- c) Eine Straße hat 8 % Steigung. Sie ist in der Waagerechten 250 m lang. Wie viele Meter steigt sie und wie groß ist der Steigungswinkel, gerundet auf Zehntel?

Antwort:

- d) Ein Dachbalken ist 6 m lang. Das Dach ist unter 40° geneigt. Wie hoch liegt der First über dem unteren Ende des Balkens, gerundet auf Zehntel?

Antwort:

- e) Zwei Wege gehen von einem Punkt aus. Sie sind 5 km und 8 km lang und bilden einen Winkel von 60° . Wie weit sind die Endpunkte voneinander entfernt?

Antwort:

- 9** Berechne c mit dem Kosinussatz. Es gilt $\cos 60^\circ = 0,5$, $\cos 90^\circ = 0$ und $\cos 120^\circ = -0,5$.

a) $a = 5$, $b = 8$, $\gamma = 60^\circ$: $c =$ _____

b) $a = 3$, $b = 5$, $\gamma = 120^\circ$: $c =$ _____

c) $a = 10$, $b = 10$, $\gamma = 60^\circ$: $c =$ _____

d) $a = 3$, $b = 4$, $\gamma = 90^\circ$: $c =$ _____

10 Begründe und rechne.

- a) Erkläre in zwei bis drei Sätzen, warum $\sin 40^\circ$ in einem kleinen und in einem großen Dreieck gleich ist.

Antwort:

- b) Zeige mit dem Kosinussatz, dass für $\gamma = 90^\circ$ der Satz des Pythagoras herauskommt.

Antwort:

- c) Ein Dreieck hat die Seiten 7, 8 und 9. Berechne den Winkel gegenüber der Seite 9, gerundet auf ganze Grad.

Antwort:

Kannst du das schon?

Kreuze an, wie sicher du dich fühlst. Hier gibt es kein Richtig oder Falsch.

Ich kann ...	sicher	fast	noch nicht
Ich benenne Gegenkathete, Ankathete und Hypotenuse.	☐	☐	☐
Ich berechne Sinus, Kosinus und Tangens.	☐	☐	☐
Ich berechne Seiten und Winkel im rechtwinkligen Dreieck.	☐	☐	☐
Ich wende den Kosinussatz an.	☐	☐	☐

Tipp: Bei „noch nicht“ schau dir „Kurz erklärt“ vorne im Heft noch einmal an oder scanne den Code auf dem Deckblatt. Dann probierst du die Aufgaben noch einmal.

Lösungen

Erst selbst rechnen, dann vergleichen. Bei den Rechenaufgaben steht der Rechenweg dabei.

●○○ Basis: Seiten benennen und Verhältnisse

1 Im Dreieck ABC liegt der rechte Winkel bei C. Kreuze an.

a) Gegenkathete

→ BC liegt dem Winkel bei A gegenüber.

b) Ankathete

→ AC liegt an A an.

c) Hypotenuse

→ AB liegt dem rechten Winkel gegenüber.

d) Gegenkathete

→ AC liegt dem Winkel bei B gegenüber.

e) Ankathete

→ BC liegt an B an.

f) Gegenkathete

→ QR liegt dem Winkel bei P gegenüber.

2 Berechne das Verhältnis als Dezimalzahl.

a) Gegenkathete 3,
Ankathete 4, Hypotenuse
5: $\sin \alpha = 0,6$

b) Gegenkathete 3,
Ankathete 4, Hypotenuse
5: $\cos \alpha = 0,8$

c) Gegenkathete 3,
Ankathete 4, Hypotenuse
5: $\tan \alpha = 0,75$

d) Gegenkathete 6,
Ankathete 8, Hypotenuse
10: $\sin \alpha = 0,6$

e) Gegenkathete 9,
Ankathete 12, Hypotenuse
15: $\cos \alpha = 0,8$

f) Gegenkathete 7,
Ankathete 24, Hypotenuse
25: $\sin \alpha = 0,28$

3 Kreuze an.

a) Hypotenuse

→ Beim Sinus steht die Hypotenuse unten.

b) Hypotenuse

→ Beim Kosinus steht die Hypotenuse unten.

c) Ankathete

→ Der Tangens kommt ohne die Hypotenuse aus.

●●○ Standard: Seiten und Winkel berechnen

4 Es gilt $\sin 30^\circ = 0,5$, $\cos 60^\circ = 0,5$ und $\tan 45^\circ = 1$. Berechne die Seite.

a) Hypotenuse 14 cm, $\alpha = 30^\circ$:
Gegenkathete $G = H \cdot \sin 30^\circ = 7$ cm

b) Hypotenuse 18 cm, $\alpha = 60^\circ$:
Ankathete $A = H \cdot \cos 60^\circ = 9$ cm

c) Ankathete 9 cm, $\alpha = 45^\circ$:
Gegenkathete $G = A \cdot \tan 45^\circ = 9$ cm

d) Hypotenuse 20 cm, $\alpha = 30^\circ$:
Gegenkathete = 10 cm

e) Gegenkathete 6 cm, $\alpha = 30^\circ$:
Hypotenuse $H = G : \sin 30^\circ = 12$ cm

5 Berechne die Seite, gerundet auf Zehntel. Stelle den Rechner auf Grad.

- a) Hypotenuse 12 cm, $\alpha = 40^\circ$: Gegenkathete $\approx 7,7$ cm
- b) Hypotenuse 10 cm, $\alpha = 35^\circ$: Ankathete $\approx 8,2$ cm
- c) Ankathete 8 cm, $\alpha = 35^\circ$: Gegenkathete $\approx 5,6$ cm
- d) Hypotenuse 15 cm, $\alpha = 25^\circ$: Gegenkathete $\approx 6,3$ cm
- e) Ankathete 20 cm, $\alpha = 50^\circ$: Gegenkathete $\approx 23,8$ cm

6 Berechne den Winkel α , gerundet auf ganze Grad.

- a) Gegenkathete 5 cm, Hypotenuse 10 cm: $\alpha \approx 30^\circ$
- b) Ankathete 6 cm, Hypotenuse 10 cm: $\alpha \approx 53^\circ$
- c) Gegenkathete 3 cm, Ankathete 4 cm: $\alpha \approx 37^\circ$
- d) Gegenkathete 8 cm, Hypotenuse 10 cm: $\alpha \approx 53^\circ$
- e) Gegenkathete 5 cm, Ankathete 12 cm: $\alpha \approx 23^\circ$

7 Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe ihn richtig auf.

- a) Stimmt.
- b) Stimmt nicht. Richtig: Es gilt $\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$.
- c) Stimmt.
- d) Stimmt nicht. Richtig: Der Sinus hängt nur vom Winkel ab und bleibt gleich.
- e) Stimmt nicht. Richtig: Eine Steigung von 10 % entspricht etwa $5,7^\circ$.
- f) Stimmt.

8 Rechne und schreibe einen Antwortsatz.

a) etwa 15,6 m

- Höhe über den Augen: $20 \cdot \tan 35^\circ \approx 14,0$ m.
- Augenhöhe addieren: $14,0 + 1,6 = 15,6$.
- Der Baum ist etwa 15,6 m hoch.

c) 20 m und etwa 4,6°

- Höhe: $250 \cdot 0,08 = 20$ m.
- $\tan \alpha = 0,08$, also $\alpha = \tan^{-1}(0,08) \approx 4,57^\circ$.
- Gerundet: $4,6^\circ$.

e) 7 km

- $c^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ = 25 + 64 - 40$.
- $c^2 = 49$.
- $c = 7$ km.

b) Höhe etwa 3,86 m, Abstand etwa 1,04 m

- Höhe: $4 \cdot \sin 75^\circ \approx 3,86$ m.
- Abstand: $4 \cdot \cos 75^\circ \approx 1,04$ m.
- Probe: $3,86^2 + 1,04^2 \approx 15,98$, und $4^2 = 16$. Das passt gut.

d) etwa 3,9 m

- Der Balken ist die Hypotenuse.
- Höhe: $6 \cdot \sin 40^\circ \approx 6 \cdot 0,643 = 3,86$ m.
- Gerundet: 3,9 m.

9 Berechne c mit dem Kosinussatz. Es gilt $\cos 60^\circ = 0,5$, $\cos 90^\circ = 0$ und $\cos 120^\circ = -0,5$.

a) $a = 5$, $b = 8$, $\gamma = 60^\circ$: $c = 7$ **b) $a = 3$, $b = 5$, $\gamma = 120^\circ$: $c = 7$** **c) $a = 10$, $b = 10$, $\gamma = 60^\circ$: $c = 10$**

d) $a = 3$, $b = 4$, $\gamma = 90^\circ$: $c = 5$

10 Begründe und rechne.

a) Beide Dreiecke sind ähnlich, weil sie dieselben Winkel haben. Alle Seiten des großen Dreiecks sind k-mal so lang. Im Verhältnis kürzt sich k heraus.

- Gleiche Winkel bedeuten ähnliche Dreiecke.
- Gegenkathete und Hypotenuse werden beide mit k multipliziert.
- Im Bruch kürzt sich k.

c) 73°

- $\cos \gamma = (49 + 64 - 81) : (2 \cdot 7 \cdot 8) = 32 : 112 \approx 0,2857$.
- $\gamma = \cos^{-1}(0,2857) \approx 73,4^\circ$.
- Gerundet: 73° .

b) $\cos 90^\circ = 0$, also $c^2 = a^2 + b^2$.

- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 90^\circ$.
- $\cos 90^\circ = 0$, der letzte Teil wird 0.
- Es bleibt $c^2 = a^2 + b^2$.