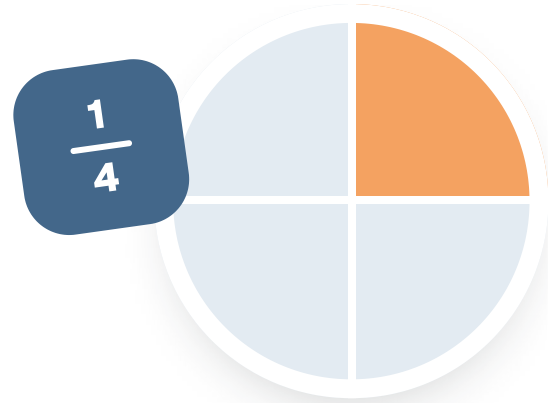




Übungsheft • Mathe • Klasse 10

Pyramide, Kegel und Kugel

Erklärungen, 54 Aufgaben in drei Stufen und alle
Lösungen mit Rechenweg.

Name _____ Datum _____

Das lernst du

- Ich berechne Oberfläche und Volumen einer Pyramide.
- Ich berechne Mantel, Oberfläche und Volumen eines Kegels.
- Ich berechne Oberfläche und Volumen einer Kugel.
- Ich löse Aufgaben mit zusammengesetzten Körpern.

So arbeitest du mit dem Heft

- **Basis** zum Einstieg
- **Standard** zum Üben
- **Plus** zum Weiterdenken

Du musst nicht alles machen.
Fang bei Basis an. Die Lösungen
stehen hinten im Heft.



Noch unsicher?

Scanne den Code. Dort wird das Thema Schritt für Schritt erklärt.

dysplus.de/lernen/realschule/klasse-10/mathe/pyramide-kegel-kugel/netz-und-oberflaeche

Kurz erklärt

Merksatz: Pyramide: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$. Kegel: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$. Kugel: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ und $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$.

Kegel und Zylinder



Ein Kegel fasst ein Drittel eines Zylinders mit gleichem r und h .

Oberfläche einer Pyramide

- 1 $a = 6 \text{ cm}$, $h_s = 5 \text{ cm}$.
- 2 $G = 36 \text{ cm}^2$. $M = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 60 \text{ cm}^2$.
- 3 $O = 96 \text{ cm}^2$.

Mantel eines Kegels

- 1 $r = 6 \text{ cm}$, $h = 8 \text{ cm}$.
- 2 $s^2 = 36 + 64 = 100$, also $s = 10 \text{ cm}$.
- 3 $M = 3,14 \cdot 6 \cdot 10 = 188,4 \text{ cm}^2$.

Tipps: Schreibe zuerst auf, was gegeben ist: r , h , s oder a . Prüfe dann, welche Länge in die Formel gehört.

Typischer Fehler: Für das Volumen brauchst du die senkrechte Höhe h . Für den Mantel brauchst du die Seitenhöhe h_s oder die Mantellinie s . Verwechsle sie nicht.

Pyramide und Begriffe

1

Eine quadratische Pyramide hat die Grundkante a und die Seitenhöhe h_s . Berechne.

a) $a = 4 \text{ cm}$, $h_s = 3 \text{ cm}$: $G = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$, $M = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$, $O = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$

b) $a = 6 \text{ cm}$, $h_s = 5 \text{ cm}$: $G = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$, $M = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$, $O = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$

c) $a = 8 \text{ cm}$, $h_s = 5 \text{ cm}$: $G = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$, $M = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$, $O = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$

d) $a = 10 \text{ cm}$, $h_s = 13 \text{ cm}$: $G = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$, $M = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$, $O = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$

e) $a = 12 \text{ cm}$, $h_s = 10 \text{ cm}$: $G = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$, $M = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$, $O = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$

f) $a = 16 \text{ cm}$, $h_s = 17 \text{ cm}$: $G = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$, $M = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$, $O = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$

2 Berechne das Volumen der quadratischen Pyramide.

a) $a = 6 \text{ cm}$, $h = 4 \text{ cm}$: $G = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$, $V = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^3$

b) $a = 9 \text{ cm}$, $h = 10 \text{ cm}$: $G = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$, $V = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^3$

c) $a = 5 \text{ cm}$, $h = 9 \text{ cm}$: $G = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$, $V = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^3$

d) $a = 10 \text{ cm}$, $h = 12 \text{ cm}$: $G = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$, $V = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^3$

e) $a = 12 \text{ cm}$, $h = 5 \text{ cm}$: $G = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$, $V = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^3$

f) $a = 8 \text{ cm}$, $h = 6 \text{ cm}$: $G = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$, $V = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^3$

3 Wähle aus.

- a) Die Höhe eines Seitendreiecks der Pyramide heißt _____.
☐ Mantellinie ☐ Radius ☐ Seitenhöhe
- b) Die Strecke von der Spitze eines Kegels zum Rand des Kreises heißt _____.
☐ Durchmesser ☐ Mantellinie ☐ Seitenhöhe
- c) Das Netz einer quadratischen Pyramide besteht aus einem Quadrat und vier _____.
☐ Kreisen ☐ Dreiecken ☐ Rechtecken
- d) Für das Volumen einer Pyramide brauchst du die _____.
☐ Mantellinie ☐ Höhe h ☐ Seitenhöhe h_s
- e) Das Netz eines Kegels besteht aus einem Kreis und einem _____.
☐ Dreieck ☐ Kreisausschnitt ☐ Rechteck
- f) Ein Kegel fasst im Vergleich zu einem Zylinder mit gleichem r und h _____.
☐ die Hälfte ☐ genauso viel ☐ ein Drittel

Kegel und Kugel

4 Berechne die Mantellinie s des Kegels.

- a) $r = 3 \text{ cm}$, $h = 4 \text{ cm}$: $s^2 = \underline{\hspace{2cm}}$, $s = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}$
- b) $r = 6 \text{ cm}$, $h = 8 \text{ cm}$: $s^2 = \underline{\hspace{2cm}}$, $s = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}$
- c) $r = 5 \text{ cm}$, $h = 12 \text{ cm}$: $s^2 = \underline{\hspace{2cm}}$, $s = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}$
- d) $r = 8 \text{ cm}$, $h = 15 \text{ cm}$: $s^2 = \underline{\hspace{2cm}}$, $s = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}$
- e) $r = 9 \text{ cm}$, $h = 12 \text{ cm}$: $s^2 = \underline{\hspace{2cm}}$, $s = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}$
- f) $r = 7 \text{ cm}$, $h = 24 \text{ cm}$: $s^2 = \underline{\hspace{2cm}}$, $s = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}$

5 Berechne Mantel und Oberfläche mit $\pi \approx 3,14$. Runde auf ganze cm^2 .

- a) $r = 3 \text{ cm}$, $s = 5 \text{ cm}$: $M \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$, $O \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$
- b) $r = 9 \text{ cm}$, $s = 15 \text{ cm}$: $M \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$, $O \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$
- c) $r = 6 \text{ cm}$, $s = 10 \text{ cm}$: $M \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$, $O \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$
- d) $r = 4 \text{ cm}$, $s = 5 \text{ cm}$: $M \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$, $O \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$
- e) $r = 5 \text{ cm}$, $s = 13 \text{ cm}$: $M \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$, $O \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$
- f) $r = 8 \text{ cm}$, $s = 17 \text{ cm}$: $M \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$, $O \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$

6 Berechne das Volumen des Kegels mit $\pi \approx 3,14$. Runde auf ganze cm^3 .

a) $r = 3 \text{ cm}$, $h = 4 \text{ cm}$: $V \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^3$

b) $r = 5 \text{ cm}$, $h = 12 \text{ cm}$: $V \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^3$

c) $r = 6 \text{ cm}$, $h = 10 \text{ cm}$: $V \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^3$

d) $r = 3 \text{ cm}$, $h = 12 \text{ cm}$: $V \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^3$

e) $r = 4 \text{ cm}$, $h = 9 \text{ cm}$: $V \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^3$

7 Berechne Oberfläche und Volumen der Kugel mit $\pi \approx 3,14$. Runde auf ganze Zahlen.

a) $r = 5 \text{ cm}$: $O \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$, $V \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^3$

b) $r = 6 \text{ cm}$: $O \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$, $V \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^3$

c) $r = 10 \text{ cm}$: $O \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$, $V \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^3$

d) $r = 8 \text{ cm}$: $O \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$, $V \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^3$

e) $r = 4 \text{ cm}$: $O \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^2$, $V \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}^3$

Sachaufgaben, Fehler finden, Begründen

8 Rechne und schreibe einen Antwortsatz.

- a) Ein Zelt hat die Form einer quadratischen Pyramide. Die Grundkante ist 4 m lang. Die Seitenhöhe der Zeltwände ist 3 m. Wie viel Stoff wird für die vier Wände gebraucht?

Antwort:

- b) Ein Spielzeugklotz ist ein Kegel mit $r = 4$ cm und $h = 9$ cm. Wie groß ist sein Volumen? Rechne mit $\pi \approx 3,14$ und runde auf ganze cm^3 .

Antwort:

- c) Ein Fußball hat den Durchmesser 22 cm. Wie groß ist seine Oberfläche? Rechne mit $\pi \approx 3,14$ und runde auf ganze cm^2 .

Antwort:

- d)** Eine Pyramide und ein Würfel haben dieselbe Grundfläche und dieselbe Höhe. Der Würfel hat 216 cm^3 . Wie groß ist das Volumen der Pyramide?

Antwort:

- e)** Ein Behälter besteht aus einem Zylinder ($r = 3 \text{ cm}$, Höhe 10 cm) und einem Kegel darauf ($r = 3 \text{ cm}$, Höhe 4 cm). Berechne das Gesamtvolumen mit $\pi \approx 3,14$. Runde auf ganze cm^3 .

Antwort:

- a) Bei der Pyramide darf man statt der Höhe h auch die Seitenhöhe h_s in die Volumenformel einsetzen. ☐ stimmt ☐ stimmt nicht
-
- b) Der Mantel eines Kegels hat die Fläche $\pi \cdot r \cdot s$. ☐ stimmt ☐ stimmt nicht
-
- c) Verdoppelt man den Radius einer Kugel, wird die Oberfläche achtmal so groß. ☐ stimmt ☐ stimmt nicht
-
- d) Ein schiefes Prisma hat dasselbe Volumen wie ein gerades Prisma mit gleicher Grundfläche und senkrechter Höhe. ☐ stimmt ☐ stimmt nicht
-
- e) Bei einem zusammengesetzten Körper addiert man die Oberflächen der Teile vollständig. ☐ stimmt ☐ stimmt nicht
-
- f) Ein Kegel fasst ein Drittel eines Zylinders mit gleichem Radius und gleicher Höhe. ☐ stimmt ☐ stimmt nicht
-

10 Begründe und rechne.

- a) Erkläre mit dem Prinzip von Cavalieri, warum ein schiefes Prisma $V = G \cdot h$ hat.

Antwort:

- b) Eine Kugel hat den Radius 3 cm. Zeige, dass Oberfläche und Volumen dieselbe Maßzahl haben. Rechne mit $\pi \approx 3,14$.

Antwort:

- c) Eine Pyramide hat $a = 6$ cm und $h = 4$ cm. Berechne die Seitenhöhe h_s und den Mantel.

Antwort:

Kannst du das schon?

Kreuze an, wie sicher du dich fühlst. Hier gibt es kein Richtig oder Falsch.

Ich kann ...	sicher	fast	noch nicht
Ich berechne Oberfläche und Volumen einer Pyramide.	☐	☐	☐
Ich berechne Mantel, Oberfläche und Volumen eines Kegels.	☐	☐	☐
Ich berechne Oberfläche und Volumen einer Kugel.	☐	☐	☐
Ich löse Aufgaben mit zusammengesetzten Körpern.	☐	☐	☐

Tipp: Bei „noch nicht“ schau dir „Kurz erklärt“ vorne im Heft noch einmal an oder scanne den Code auf dem Deckblatt. Dann probierst du die Aufgaben noch einmal.

Lösungen

Erst selbst rechnen, dann vergleichen. Bei den Rechenaufgaben steht der Rechenweg dabei.

●○○ Basis: Pyramide und Begriffe

1 Eine quadratische Pyramide hat die Grundkante a und die Seitenhöhe h_s . Berechne.

- | | | |
|---|---|---|
| a) $a = 4 \text{ cm}$, $h_s = 3 \text{ cm}$: $G = 16 \text{ cm}^2$, $M = 24 \text{ cm}^2$, $O = 40 \text{ cm}^2$ | b) $a = 6 \text{ cm}$, $h_s = 5 \text{ cm}$: $G = 36 \text{ cm}^2$, $M = 60 \text{ cm}^2$, $O = 96 \text{ cm}^2$ | c) $a = 8 \text{ cm}$, $h_s = 5 \text{ cm}$: $G = 64 \text{ cm}^2$, $M = 80 \text{ cm}^2$, $O = 144 \text{ cm}^2$ |
| d) $a = 10 \text{ cm}$, $h_s = 13 \text{ cm}$: $G = 100 \text{ cm}^2$, $M = 260 \text{ cm}^2$, $O = 360 \text{ cm}^2$ | e) $a = 12 \text{ cm}$, $h_s = 10 \text{ cm}$: $G = 144 \text{ cm}^2$, $M = 240 \text{ cm}^2$, $O = 384 \text{ cm}^2$ | f) $a = 16 \text{ cm}$, $h_s = 17 \text{ cm}$: $G = 256 \text{ cm}^2$, $M = 544 \text{ cm}^2$, $O = 800 \text{ cm}^2$ |

2 Berechne das Volumen der quadratischen Pyramide.

- | | | |
|--|---|---|
| a) $a = 6 \text{ cm}$, $h = 4 \text{ cm}$: $G = 36 \text{ cm}^2$, $V = 48 \text{ cm}^3$ | b) $a = 9 \text{ cm}$, $h = 10 \text{ cm}$: $G = 81 \text{ cm}^2$, $V = 270 \text{ cm}^3$ | c) $a = 5 \text{ cm}$, $h = 9 \text{ cm}$: $G = 25 \text{ cm}^2$, $V = 75 \text{ cm}^3$ |
| d) $a = 10 \text{ cm}$, $h = 12 \text{ cm}$: $G = 100 \text{ cm}^2$, $V = 400 \text{ cm}^3$ | e) $a = 12 \text{ cm}$, $h = 5 \text{ cm}$: $G = 144 \text{ cm}^2$, $V = 240 \text{ cm}^3$ | f) $a = 8 \text{ cm}$, $h = 6 \text{ cm}$: $G = 64 \text{ cm}^2$, $V = 128 \text{ cm}^3$ |

3 Wähle aus.

- | | |
|---|--|
| a) Seitenhöhe
→ h_s liegt in der Seitenfläche. | b) Mantellinie
→ Sie wird mit s bezeichnet. |
| c) Dreiecken
→ Die Seitenflächen laufen in der Spitze zusammen. | d) Höhe h
→ $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$. |
| e) Kreisausschnitt
→ Der Kreisausschnitt ist der Mantel. | f) ein Drittel
→ $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$. |

●●○ Standard: Kegel und Kugel

4 Berechne die Mantellinie s des Kegels.

- | | | |
|---|---|---|
| a) $r = 3 \text{ cm}$, $h = 4 \text{ cm}$: $s^2 = 25$, $s = 5 \text{ cm}$ | b) $r = 6 \text{ cm}$, $h = 8 \text{ cm}$: $s^2 = 100$, $s = 10 \text{ cm}$ | c) $r = 5 \text{ cm}$, $h = 12 \text{ cm}$: $s^2 = 169$, $s = 13 \text{ cm}$ |
| d) $r = 8 \text{ cm}$, $h = 15 \text{ cm}$: $s^2 = 289$, $s = 17 \text{ cm}$ | e) $r = 9 \text{ cm}$, $h = 12 \text{ cm}$: $s^2 = 225$, $s = 15 \text{ cm}$ | f) $r = 7 \text{ cm}$, $h = 24 \text{ cm}$: $s^2 = 625$, $s = 25 \text{ cm}$ |

5 Berechne Mantel und Oberfläche mit $\pi \approx 3,14$. Runde auf ganze cm^2 .

- a) $r = 3 \text{ cm}$, $s = 5 \text{ cm}$: $M \approx 47 \text{ cm}^2$, $O \approx 75 \text{ cm}^2$ b) $r = 9 \text{ cm}$, $s = 15 \text{ cm}$: $M \approx 424 \text{ cm}^2$, $O \approx 678 \text{ cm}^2$ c) $r = 6 \text{ cm}$, $s = 10 \text{ cm}$: $M \approx 188 \text{ cm}^2$, $O \approx 301 \text{ cm}^2$
- d) $r = 4 \text{ cm}$, $s = 5 \text{ cm}$: $M \approx 63 \text{ cm}^2$, $O \approx 113 \text{ cm}^2$ e) $r = 5 \text{ cm}$, $s = 13 \text{ cm}$: $M \approx 204 \text{ cm}^2$, $O \approx 283 \text{ cm}^2$ f) $r = 8 \text{ cm}$, $s = 17 \text{ cm}$: $M \approx 427 \text{ cm}^2$, $O \approx 628 \text{ cm}^2$

6 Berechne das Volumen des Kegels mit $\pi \approx 3,14$. Runde auf ganze cm^3 .

- a) $r = 3 \text{ cm}$, $h = 4 \text{ cm}$: $V \approx 38 \text{ cm}^3$ b) $r = 5 \text{ cm}$, $h = 12 \text{ cm}$: $V \approx 314 \text{ cm}^3$ c) $r = 6 \text{ cm}$, $h = 10 \text{ cm}$: $V \approx 377 \text{ cm}^3$
- d) $r = 3 \text{ cm}$, $h = 12 \text{ cm}$: $V \approx 113 \text{ cm}^3$ e) $r = 4 \text{ cm}$, $h = 9 \text{ cm}$: $V \approx 151 \text{ cm}^3$

7 Berechne Oberfläche und Volumen der Kugel mit $\pi \approx 3,14$. Runde auf ganze Zahlen.

- a) $r = 5 \text{ cm}$: $O \approx 314 \text{ cm}^2$, $V \approx 523 \text{ cm}^3$ b) $r = 6 \text{ cm}$: $O \approx 452 \text{ cm}^2$, $V \approx 904 \text{ cm}^3$ c) $r = 10 \text{ cm}$: $O \approx 1256 \text{ cm}^2$, $V \approx 4187 \text{ cm}^3$
- d) $r = 8 \text{ cm}$: $O \approx 804 \text{ cm}^2$, $V \approx 2144 \text{ cm}^3$ e) $r = 4 \text{ cm}$: $O \approx 201 \text{ cm}^2$, $V \approx 268 \text{ cm}^3$

● ● ● Plus: Sachaufgaben, Fehler finden, Begründen

8 Rechne und schreibe einen Antwortsatz.

- a) **24 m^2**
→ Eine Wand: $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6 \text{ m}^2$.
→ Vier Wände: $4 \cdot 6 = 24 \text{ m}^2$.
- b) **151 cm^3**
→ $G = 3,14 \cdot 16 = 50,24 \text{ cm}^2$.
→ $V = 50,24 \cdot 9 : 3 = 150,72$.
→ Gerundet: 151 cm^3 .
- c) **1520 cm^2**
→ $r = 22 : 2 = 11 \text{ cm}$.
→ $O = 4 \cdot 3,14 \cdot 121 = 1519,76 \text{ cm}^2$.
→ Gerundet: 1520 cm^2 .
- d) **72 cm^3**
→ Ein Würfel ist ein besonderes Prisma. Die Pyramide hat ein Drittel davon.
→ $216 : 3 = 72 \text{ cm}^3$.
- e) **320 cm^3**
→ Zylinder: $3,14 \cdot 9 \cdot 10 = 282,6 \text{ cm}^3$.
→ Kegel: $3,14 \cdot 9 \cdot 4 : 3 = 37,68 \text{ cm}^3$.
→ Summe: 320,28 cm^3 . Gerundet: 320 cm^3 .

9 Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe die richtige Fassung auf.

- a) Stimmt nicht. Richtig: Das Volumen braucht die senkrechte Höhe h . b) Stimmt. c) Stimmt nicht. Richtig: Die Oberfläche wird viermal so groß. Das Volumen wird achtmal so groß.
- d) Stimmt. e) Stimmt nicht. Richtig: Die Berührflächen liegen innen und zählen nicht zur Oberfläche. f) Stimmt.

10 Begründe und rechne.

- a) Ein gerades Prisma mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe hat in jeder Höhe gleich große Schnittflächen. Nach Cavalieri haben beide dasselbe Volumen.
- Gleiche Höhe prüfen.
 - Gleiche Schnittflächen in jeder Höhe prüfen.
 - Dann gilt dasselbe Volumen.
- b) $O = 4 \cdot 3,14 \cdot 9 = 113,04$ und $V = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 27 = 113,04$. Die Maßzahlen sind gleich (die Einheiten cm^2 und cm^3 aber nicht).
- $O = 4 \cdot 3,14 \cdot 9 = 113,04$.
 - $V = 4 \cdot 3,14 \cdot 27 : 3 = 113,04$.
- c) $h_s = 5 \text{ cm}$, $M = 60 \text{ cm}^2$
- $h_s^2 = h^2 + (a : 2)^2 = 16 + 9 = 25$.
 - $h_s = 5 \text{ cm}$.
 - $M = 2 \cdot 6 \cdot 5 = 60 \text{ cm}^2$.