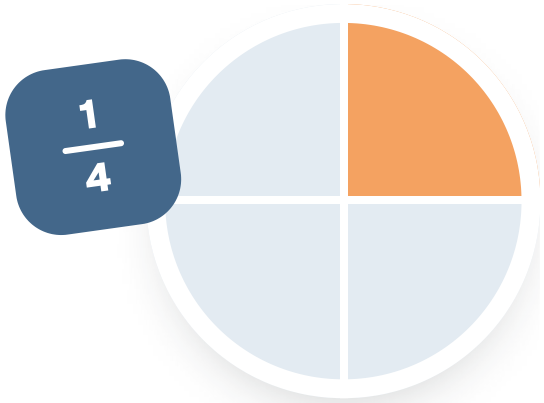
DYS+ Campus



Übungsheft · Mathe · Klasse 13

Produkt- und Kettenregel

Erklärungen, 38 Aufgaben in drei Stufen und alle Lösungen mit Rechenweg.

Name _____ **Datum** _____

Das lernst du

- Ich leite sin x, cos x, √x und 1/x ab.
- Ich wende die Produktregel an.
- Ich erkenne innere und äußere Funktion und wende die Kettenregel an.
- Ich leite Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten ab.

So arbeitest du mit dem Heft

●○○ **Basis** zum Einstieg

●●○ **Standard** zum Üben

●●● **Plus** zum Weiterdenken

Du musst nicht alles machen. Fang bei Basis an. Die Lösungen stehen hinten im Heft.

Noch unsicher?

Scanne den Code. Dort wird das Thema Schritt für Schritt erklärt.

dysplus.de/lernen/gymnasium/klasse-13/mathe/produkt-und-kettenregel/sinus-kosinus-wurzel-und-kehrwert-ableiten

Kurz erklärt

Merksatz: $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$ (Bogenmaß), $(\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$, $(1/x)' = -1/x^2$. Produktregel: $(u\cdot v)' = u'v + uv'$. Kettenregel: $(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$.

Beispiele

f(x)	f′(x)
$x\cdot e^x$	$(1 + x)e^x$
$(2x+1)^3$	$6(2x+1)^2$
$\sin(2x)$	$2\cos(2x)$
$x^{(\frac{3}{2})}$	$\frac{3}{2} \cdot x^{(\frac{1}{2})}$

f(x) = x · e^(–x) ableiten

1. Produkt aus u = x und v = e^(–x).
2. u′ = 1. v′ = –e^(–x) (Kettenregel).
3. f′(x) = e^(–x) + x · (–e^(–x)) = (1 – x)e^(–x).

Tipp: Notiere erst u, v, u′, v′. Dann setzt du in die Regel ein.

Typischer Fehler: $(u\cdot v)'$ ist nicht $u'\cdot v'$. Und bei der Kettenregel darf die innere Ableitung nicht fehlen.

●○○ Basis

Grundableitungen

1 Leite ab und berechne den Wert. Winkel im Bogenmaß.

a) $f(x) = \sin x$. $f'(0) =$ _____

b) $f(x) = \cos x$. $f'(\pi/2) =$ _____

c) $f(x) = \sqrt{x}$. $f'(4) =$ _____ (Dezimalzahl)

d) $f(x) = 1/x$. $f'(2) =$ _____ (Dezimalzahl)

e) $f(x) = 2\sqrt{x}$. $f'(1) =$ _____

2 Kreuze an.

a) $(\sin x)' =$ _____ ☐ $-\cos x$ ☐ $\cos x$

b) $(\cos x)' =$ _____ ☐ $-\sin x$ ☐ $\sin x$

c) $(1/x)' =$ _____ ☐ $-1/x^2$ ☐ $1/x^2$

d) $(\sqrt{x})' =$ _____ ☐ $1/\sqrt{x}$ ☐ $1/(2\sqrt{x})$

3 Summen ableiten.

a) $f(x) = 3 \sin x - 2 \cos x$. $f'(0) =$ _____

b) $f(x) = x^2 + 1/x$. $f'(1) =$ _____

●●○ Standard

Produktregel, Verkettung und Zusammensetzung

4 Leite mit der Produktregel ab und berechne den Wert.

a) $f(x) = x \cdot e^x$. $f'(0) =$ _____

b) $f(x) = x \cdot \sin x$. $f'(0) =$ _____

c) $f(x) = (x + 1) \cdot e^x$. $f'(0) =$ _____

d) $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$. $f'(4) =$ _____

e) $f(x) = (x - 3) \cdot x^2$. $f'(2) =$ _____

5 Innere oder äußere Funktion? Kreuze an.

a) Bei $f(x) = (3x - 1)^4$ ist $3x - 1$ die _____ Funktion. ☐ **innere** ☐ **äußere**

b) Bei f(x) = e^(x²) ist e^z die _____ Funktion. ☐ **äußere** ☐ **innere**

c) Bei f(x) = sin(2x) ist 2x die _____ Funktion. ☐ **äußere** ☐ **innere**

6 Es sei u(z) und v(x) gegeben. Berechne.

a) $u(z) = z^2$, $v(x) = x - 3$. $u(v(5)) =$ _____

b) $u(z) = \sqrt{z}$, $v(x) = 2x + 1$. $u(v(4)) =$ _____

c) $u(z) = z + 1$, $v(x) = x^2$. $v(u(2)) =$ _____

7 Beschreibe den Zusammenhang.

a) Modell (fiktiv): Preis $p(x) = 10 - 0{,}5x$ (in €) bei x Stück. Gib den Erlös E(x) an. Ist das eine Summe, ein Produkt oder eine Verkettung?

Antwort:

b) Modell: Der Radius wächst nach $r(t) = 2 + 0{,}5t$, die Fläche ist $A = \pi \cdot r^2$. Gib A(t) an. Welches Muster?

Antwort:

8 Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe die richtige Fassung auf.

a) Es gilt $(x \cdot x)' = 1 \cdot 1$. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

b) Die Ableitung von sin(x) im Bogenmaß ist cos(x). ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

c) $(\sqrt{x})' = 1/\sqrt{x}$. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

●●● Plus

Kettenregel, Kombination und rationale Exponenten (vor allem für den Leistungskurs)

9 Leite mit der Kettenregel ab und berechne den Wert.

a) $f(x) = (2x + 1)^3$. $f'(0) =$ _____

b) $f(x) = \sin(3x)$. $f'(0) =$ _____

c) $f(x) = (x^2 + 1)^2$. $f'(1) =$ _____

d) $f(x) = \sqrt{(x^2 + 16)}$. $f'(3) =$ _____ (Dezimalzahl)

10 Kombiniere Produkt- und Kettenregel.

a) $f(x) = x \cdot e^{(2x)}$. $f'(0) =$ _____

b) $f(x) = x \cdot e^{(-x)}$ hat einen Hochpunkt bei $x =$ _____

c) $f(x) = x \cdot \sqrt{(x + 1)}$. $f'(0) =$ _____

11 Rationale Exponenten.

a) $f(x) = x^{(\frac{3}{2})}$. $f'(4) =$ _____

b) $f(x) = x^{(-\frac{1}{2})}$. $f'(1) =$ _____ (Dezimalzahl)

c) $f(x) = x^{(\frac{4}{3})}$. $f'(27) =$ _____

12 Begründe.

a) Zeige mit der Produktregel, dass $(x^{-2})' = -2x^{-3}$ gilt. Nutze $x^2 \cdot x^{-2} = 1$.

Antwort:

Kannst du das schon?

Kreuze an, wie sicher du dich fühlst. Hier gibt es kein Richtig oder Falsch.

Ich kann …	sicher	fast	noch nicht
Ich leite sin x, cos x, √x und 1/x ab.	☐	☐	☐
Ich wende die Produktregel an.	☐	☐	☐
Ich erkenne innere und äußere Funktion und wende die Kettenregel an.	☐	☐	☐
Ich leite Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten ab.	☐	☐	☐

Tipp: Bei „noch nicht“ schau dir „Kurz erklärt“ vorne im Heft noch einmal an oder scanne den Code auf dem Deckblatt. Dann probierst du die Aufgaben noch einmal.

Lösungen

Erst selbst rechnen, dann vergleichen. Bei den Rechenaufgaben steht der Rechenweg dabei.

●○○ Basis: Grundableitungen

1 Leite ab und berechne den Wert. Winkel im Bogenmaß.

a) **$f(x) = \sin x$. $f'(0) = 1$**

→ $f'(x) = \cos x$, $\cos 0 = 1$.

b) **$f(x) = \cos x$. $f'(\pi/2) = -1$**

→ $f'(x) = -\sin x$, $\sin(\pi/2) = 1$.

c) **$f(x) = \sqrt{x}$. $f'(4) = 0{,}25$ (Dezimalzahl)**

→ $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$. $f'(4) = \frac{1}{4}$.

d) **$f(x) = 1/x$. $f'(2) = -0{,}25$ (Dezimalzahl)**

→ $f'(x) = -1/x^2$. $f'(2) = -\frac{1}{4}$.

e) **$f(x) = 2\sqrt{x}$. $f'(1) = 1$**

→ $f'(x) = 2 \cdot 1/(2\sqrt{x}) = 1/\sqrt{x}$.

2 Kreuze an.

a) **$\cos x$**

→ Der Sinus geht in den Kosinus über.

b) **$-\sin x$**

→ Rechts von $x = 0$ fällt der Kosinus, dort ist $-\sin x$ negativ.

c) **$-1/x^2$**

→ Potenzregel mit $n = -1$.

d) **$1/(2\sqrt{x})$**

→ Potenzregel mit $n = \frac{1}{2}$.

3 Summen ableiten.

a) **$f(x) = 3\sin x - 2\cos x$. $f'(0) = 3$**

→ $f'(x) = 3\cos x + 2\sin x$. $f'(0) = 3$.

b) **$f(x) = x^2 + 1/x$. $f'(1) = 1$**

→ $f'(x) = 2x - 1/x^2$. $f'(1) = 2 - 1 = 1$.

●●○ Standard: Produktregel, Verkettung und Zusammensetzung

4 Leite mit der Produktregel ab und berechne den Wert.

a) **$f(x) = x \cdot e^x$. $f'(0) = 1$**

→ $f'(x) = e^x + x \cdot e^x$. $f'(0) = 1$.

b) **$f(x) = x \cdot \sin x$. $f'(0) = 0$**

→ $f'(x) = \sin x + x \cdot \cos x$. $f'(0) = 0$.

c) **$f(x) = (x + 1) \cdot e^x$. $f'(0) = 2$**

→ $f'(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$.

d) **$f(x) = x \cdot \sqrt{x}$. $f'(4) = 3$**

→ $f'(x) = \sqrt{x} + x/(2\sqrt{x})$. $f'(4) = 2 + 1 = 3$.

e) **$f(x) = (x - 3) \cdot x^2$. $f'(2) = 0$**

→ $f'(x) = x^2 + (x-3) \cdot 2x$. $f'(2) = 4 - 4 = 0$.

5 Innere oder äußere Funktion? Kreuze an.

a) innere

→ Sie steht in der Klammer.

b) äußere

→ Sie wird zuletzt angewendet.

c) innere

→ Sie wird zuerst berechnet.

6 Es sei u(z) und v(x) gegeben. Berechne.

a) $u(z) = z^2$, $v(x) = x - 3$. $u(v(5)) = 4$

→ v(5) = 2, u(2) = 4.

b) $u(z) = \sqrt{z}$, $v(x) = 2x + 1$. $u(v(4)) = 3$

→ v(4) = 9, u(9) = 3.

c) $u(z) = z + 1$, $v(x) = x^2$. $v(u(2)) = 9$

→ u(2) = 3, v(3) = 9.

7 Beschreibe den Zusammenhang.

a) $E(x) = x \cdot (10 - 0{,}5x)$, ein Produkt

→ Erlös = Menge · Preis.

→ $E(x) = x \cdot p(x) = x \cdot (10 - 0{,}5x)$.

b) $A(t) = \pi \cdot (2 + 0{,}5t)^2$, eine Verkettung

→ Setze r(t) in A ein.

→ Innen r(t), außen $\pi \cdot z^2$.

8 Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe die richtige Fassung auf.

a) Stimmt nicht. Richtig: $(x \cdot x)' = (x^2)' = 2x$. Die Produktregel gibt $1 \cdot x + x \cdot 1$.

b) Stimmt.

c) Stimmt nicht. Richtig: $(\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$.

●●● Plus: Kettenregel, Kombination und rationale Exponenten (vor allem für den Leistungskurs)

9 Leite mit der Kettenregel ab und berechne den Wert.

a) $f(x) = (2x + 1)^3$. $f'(0) = 6$

→ $f'(x) = 3(2x+1)^2 \cdot 2$. $f'(0) = 6$.

b) $f(x) = \sin(3x)$. $f'(0) = 3$

→ $f'(x) = 3\cos(3x)$. $f'(0) = 3$.

c) $f(x) = (x^2 + 1)^2$. $f'(1) = 8$

→ $f'(x) = 2(x^2+1) \cdot 2x$. $f'(1) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

d) $f(x) = \sqrt{(x^2 + 16)}$. $f'(3) = 0{,}6$ (Dezimalzahl)

→ $f'(x) = x/\sqrt{(x^2+16)}$. $f'(3) = \frac{3}{5}$.

10 Kombiniere Produkt- und Kettenregel.

a) **$f(x) = x \cdot e^{2x}$. $f'(0) = 1$**

→ $f'(x) = e^{2x} + x \cdot 2e^{2x}$. $f'(0) = 1$.

b) **$f(x) = x \cdot e^{-x}$ hat einen Hochpunkt bei $x = 1$**

→ $f'(x) = (1 - x)e^{-x} = 0$ ergibt $x = 1$.

c) **$f(x) = x \cdot \sqrt{(x + 1)}$. $f'(0) = 1$**

→ $f'(x) = \sqrt{(x+1)} + x/(2\sqrt{(x+1)})$. $f'(0) = 1 + 0$.

11 Rationale Exponenten.

a) **$f(x) = x^{\frac{3}{2}}$. $f'(4) = 3$**

→ $f'(x) = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}}$. $f'(4) = 1{,}5 \cdot 2 = 3$.

b) **$f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$. $f'(1) = -0{,}5$ (Dezimalzahl)**

→ $f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}}$. $f'(1) = -0{,}5$.

c) **$f(x) = x^{\frac{4}{3}}$. $f'(27) = 4$**

→ $f'(x) = \frac{4}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}}$. $f'(27) = \frac{4}{3} \cdot 3 = 4$.

12 Begründe.

a) **Aus $2x \cdot x^{-2} + x^2 \cdot (x^{-2})' = 0$ folgt $(x^{-2})' = -2x^{-3}$.**

→ Ableiten von $x^2 \cdot x^{-2} = 1$: $2x \cdot x^{-2} + x^2 \cdot (x^{-2})' = 0$.

→ $2x \cdot x^{-2} = 2x^{-1}$.

→ $x^2 \cdot (x^{-2})' = -2x^{-1}$, also $(x^{-2})' = -2x^{-3}$.