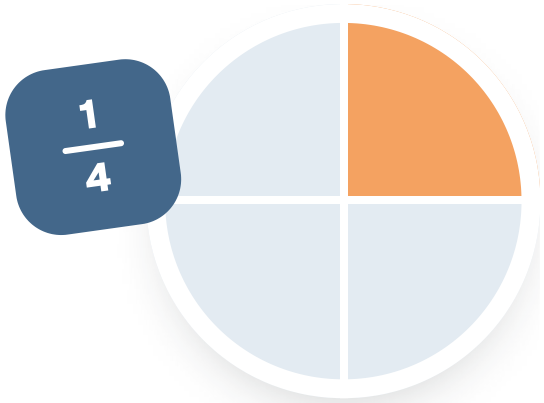
DYS+ Campus



Übungsheft · Mathe · Klasse 13

Die Normalverteilung

Erklärungen, 25 Aufgaben in drei Stufen und alle Lösungen mit Rechenweg.

Name _____ **Datum** _____

Das lernst du

- Ich unterscheide diskrete und stetige Zufallsgrößen und lese Wahrscheinlichkeiten aus Dichten.
- Ich beschreibe die Glockenkurve mit μ und σ.
- Ich nutze Verteilungsfunktion und Standardisierung und vergleiche mit der Binomialverteilung.

So arbeitest du mit dem Heft

●○○ **Basis** zum Einstieg

●●○ **Standard** zum Üben

●●● **Plus** zum Weiterdenken

Du musst nicht alles machen. Fang bei Basis an. Die Lösungen stehen hinten im Heft.

Noch unsicher?

Scanne den Code. Dort wird das Thema Schritt für Schritt erklärt.

dysplus.de/lernen/gymnasium/klasse-13/mathe/normalverteilung/diskret-und-stetig

Kurz erklärt

Tipp: Dieses Heft gehört zu einem Thema, das vor allem für den Leistungskurs vorgesehen ist.

Merksatz: Dichte $f \geq 0$, Gesamtfläche 1. $P(a \leq X \leq b)$ = Fläche = $F(b) - F(a)$ mit $F(x) = P(X \leq x)$. Normalverteilung: Hochpunkt bei μ, Wendestellen $\mu \pm \sigma$. Standardisieren: $z = (x - \mu)/\sigma$.

Standardnormalverteilung (Software, gerundet)

z	−2	−1	0	1	2
F(z)	0,0228	0,1587	0,5	0,8413	0,9772

$P(X \leq 115)$ für $\mu = 100$ und $\sigma = 15$

1. $z = (115 - 100)/15 = 1$.
2. $F(1) \approx 0{,}8413$.
3. $P(X \leq 115) \approx 0{,}841$.

Typischer Fehler: Für „rechts von a“ gilt $P(X > a) = 1 - F(a)$. Die Höhe einer Dichte ist keine Wahrscheinlichkeit.

●○○ Basis

Diskret, stetig und die Glockenkurve

1 Kreuze an.

a) Die Augenzahl eines Würfels ist _____. ☐ diskret ☐ stetig

b) Das Körpergewicht einer Person ist _____. ☐ diskret ☐ stetig

c) Die Anzahl der E-Mails an einem Tag ist _____. ☐ stetig ☐ diskret

d) Die Wartezeit auf einen Bus ist _____. ☐ stetig ☐ diskret

2 Gleichverteilung auf dem Bereich von 0 bis 5 (Dichte konstant).

a) Die Höhe der Dichte ist _____.

b) $P(1 \leq X \leq 3) =$ _____

c) $P(X = 2) =$ _____

3 Normalverteilung mit $\mu = 40$ und $\sigma = 5$.

a) Der Hochpunkt liegt bei $x =$ _____.

b) Die Wendestellen liegen bei $x =$ _____ und $x =$ _____.

●●○ Standard

Standardisieren und Verteilungsfunktion

4 **Berechne den z-Wert für μ = 100 und σ = 15.**

a) x = 130: z = _____

b) x = 85: z = _____

c) x = 107,5: z = _____

5 **Lies aus der Tabelle der Standardnormalverteilung ab (Dezimalzahl, vier Nachkommastellen).**

a) $P(Z \leq 2) \approx$ _____

b) $P(Z \geq 1) \approx$ _____

c) $P(-1 \leq Z \leq 1) \approx$ _____

6 **Rechne und schreibe einen Antwortsatz. Alle Werte sind ausgedacht (Modell).**

a) Testwerte sind normalverteilt mit μ = 100 und σ = 15. Wie groß ist $P(X \leq 115)$? Runde auf drei Nachkommastellen.

Antwort:

b) Wie groß ist $P(X > 130)$ bei μ = 100 und σ = 15? Runde auf drei Nachkommastellen.

Antwort:

c) Eine Abfüllmaschine füllt normalverteilt mit $\mu = 500$ g und $\sigma = 4$ g. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine Füllmenge unter 492 g?

Antwort:

7 Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe die richtige Fassung auf.

a) Bei einer stetigen Zufallsgröße ist $P(X = 3) = 0$. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

b) Die Fläche unter der Glockenkurve wird größer, wenn σ größer wird. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

c) Bei jeder Normalverteilung gilt $P(X \leq \mu) = 0{,}5$. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

●●● Plus

Integralfunktion und Näherung

8 Rechne und begründe.

a) Eine Dichte ist $f(x) = x/2$ für $0 \le x \le 2$, die Verteilungsfunktion ist $F(x) = x^2/4$. Berechne $P(0{,}5 \le X \le 1{,}5)$.

Antwort:

b) Prüfe, dass $F(x) = x^2/4$ eine Stammfunktion von $f(x) = x/2$ ist.

Antwort:

c) Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = 0{,}5$. Berechne $P(X \le 60)$ näherungsweise mit der Normalverteilung mit Korrektur um eine halbe Einheit.

Antwort:

9 Binomialverteilung mit n = 100.

a) Für $p = 0{,}04$ ist $\sigma \approx$ _____ (eine Nachkommastelle). Wegen $\sigma < 3$ ist die Näherung nicht brauchbar.

Kannst du das schon?

Kreuze an, wie sicher du dich fühlst. Hier gibt es kein Richtig oder Falsch.

Ich kann …	sicher	fast	noch nicht
Ich unterscheide diskrete und stetige Zufallsgrößen und lese Wahrscheinlichkeiten aus Dichten.	☐	☐	☐
Ich beschreibe die Glockenkurve mit μ und σ.	☐	☐	☐
Ich nutze Verteilungsfunktion und Standardisierung und vergleiche mit der Binomialverteilung.	☐	☐	☐

Tipp: Bei „noch nicht“ schau dir „Kurz erklärt“ vorne im Heft noch einmal an oder scanne den Code auf dem Deckblatt. Dann probierst du die Aufgaben noch einmal.

Lösungen

Erst selbst rechnen, dann vergleichen. Bei den Rechenaufgaben steht der Rechenweg dabei.

●○○ Basis: Diskret, stetig und die Glockenkurve

1 Kreuze an.

a) diskret

→ Nur die Werte 1 bis 6.

b) stetig

→ Jeder Wert in einem Bereich ist möglich.

c) diskret

→ Nur ganze Zahlen.

d) stetig

→ Jede Zeit ist möglich.

2 Gleichverteilung auf dem Bereich von 0 bis 5 (Dichte konstant).

a) Die Höhe der Dichte ist 0,2.

→ Fläche 5 · Höhe = 1.

b) P(1 ≤ X ≤ 3) = 0,4

→ 2 · 0,2 = 0,4.

c) P(X = 2) = 0

→ Ein einzelner Punkt hat die Fläche 0.

3 Normalverteilung mit μ = 40 und σ = 5.

a) Der Hochpunkt liegt bei x = 40.

→ Bei μ.

b) Die Wendestellen liegen bei x = 35 und x = 45.

→ μ − σ und μ + σ.

●●○ Standard: Standardisieren und Verteilungsfunktion

4 Berechne den z-Wert für μ = 100 und σ = 15.

a) x = 130: z = 2

→ (130 − 100)/15 = 2.

b) x = 85: z = −1

→ (85 − 100)/15 = −1.

c) x = 107,5: z = 0,5

→ 7,5/15 = 0,5.

5 Lies aus der Tabelle der Standardnormalverteilung ab (Dezimalzahl, vier Nachkommastellen).

a) P(Z ≤ 2) ≈ 0,9772

b) P(Z ≥ 1) ≈ 0,1587

→ 1 − 0,8413 = 0,1587.

c) P(−1 ≤ Z ≤ 1) ≈ 0,6826

→ 0,8413 − 0,1587 = 0,6826.

6 **Rechne und schreibe einen Antwortsatz. Alle Werte sind ausgedacht (Modell).**

a) **≈ 0,841**

→ z = 1, F(1) = 0,8413.

→ Etwa 84,1 % der Testwerte liegen bei höchstens 115.

b) **≈ 0,023**

→ z = 2, F(2) = 0,9772.

→ P(X > 130) = 1 – 0,9772 = 0,0228 ≈ 0,023.

c) **≈ 0,023**

→ z = (492 – 500)/4 = –2.

→ F(–2) = 0,0228 ≈ 0,023. Etwa 2,3 % der Packungen sind zu leicht.

7 **Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe die richtige Fassung auf.**

a) **Stimmt.**

b) **Stimmt nicht. Richtig: Die Fläche ist immer 1. Die Kurve wird nur breiter und flacher.**

c) **Stimmt.**

●●● Plus: Integralfunktion und Näherung

8 **Rechne und begründe.**

a) **0,5**

→ $F(1{,}5) = 1{,}5^2/4 = 2{,}25/4 = 0{,}5625$.

→ F(0,5) = 0,25/4 = 0,0625.

→ 0,5625 – 0,0625 = 0,5.

b) **F′(x) = x/2 = f(x)**

→ F′(x) = 2x/4 = x/2.

→ Das ist f(x), also ist F eine Stammfunktion.

c) **≈ 0,982**

→ μ = 50, σ = 5, σ > 3.

→ z = (60 + 0,5 – 50)/5 = 2,1.

→ F(2,1) ≈ 0,9821. Der genaue Binomialwert ist 0,9824.

9 **Binomialverteilung mit n = 100.**

a) **Für p = 0,04 ist σ ≈ 2,0 (eine Nachkommastelle). Wegen σ < 3 ist die Näherung nicht brauchbar.**

→ σ = √3,84 ≈ 2,0 < 3.