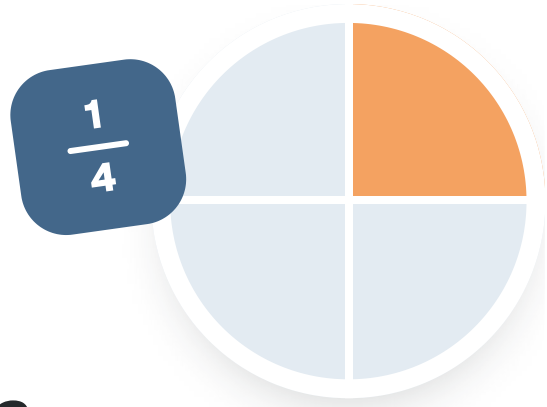
DYS+ Campus



Übungsheft · Mathe · Klasse 12

Vom Bestand zum Integral

Erklärungen, 27 Aufgaben in drei Stufen und alle Lösungen mit Rechenweg.

Name _____ **Datum** _____

Das lernst du

- Ich berechne Bestandsänderungen aus Raten.
- Ich bestimme orientierte Flächen und einfache Integrale.
- Ich skizziere Flächeninhaltsfunktionen.
- Ich deute Integrale im Sachkontext.

So arbeitest du mit dem Heft

●○○ **Basis** zum Einstieg

●●○ **Standard** zum Üben

●●● **Plus** zum Weiterdenken

Du musst nicht alles machen. Fang bei Basis an. Die Lösungen stehen hinten im Heft.

Noch unsicher?

Scanne den Code. Dort wird das Thema Schritt für Schritt erklärt.

dysplus.de/lernen/gymnasium/klasse-12/mathe/integral-als-bestand/bestand-aus-aenderungsrate

Kurz erklärt

Merksatz: Änderung des Bestands = Rate · Zeit. Orientierte Fläche: über der x-Achse plus, darunter minus. Das bestimmte Integral $\int$ von a bis b f(x) dx ist die orientierte Fläche. Untersumme ≤ Integral ≤ Obersumme.

Wichtige Zusammenhänge

Was	Bedeutung	Beispiel
Rate · Zeit	Änderung des Bestands	3 l/min · 4 min = 12 l
orientierte Fläche	Flächen über der Achse minus Flächen darunter	−9 + 4 = −5
Integral $\int_0^4 2x\,dx$	Fläche eines Dreiecks, Grundseite 4, Höhe 8	16
$A(x) = \int_0^x f(t)\,dt$	Flächeninhaltsfunktion	f > 0: A steigt

Orientierte Fläche von f(x) = 2x − 6 auf [0 ; 5]

1. Nullstelle bei x = 3.
2. Dreieck von 0 bis 3 unter der Achse: ½ · 3 · 6 = 9, also −9.
3. Dreieck von 3 bis 5 über der Achse: ½ · 2 · 4 = 4, also +4.
4. Orientierte Fläche: −9 + 4 = −5.

Tipp: Schreibe Einheiten mit. Zeichne eine Skizze und markiere, welche Teile über und welche unter der x-Achse liegen.

Typischer Fehler: Die orientierte Fläche ist nicht der gesamte Flächeninhalt. Ein Abfluss oder ein Stück unter der Achse zählt negativ. Der Anfangsbestand kommt zur Änderung noch dazu.

●○○ Basis

Bestände aus Raten und orientierte Flächen

1 Rechne Rate mal Zeit. Die Zahlen sind Modellwerte.

a) Zufluss 4 l/min für 5 min: Der Inhalt ändert sich um _____ Liter.

b) Änderungsrate −3 l/min für 6 min: Der Inhalt ändert sich um _____ Liter.

c) 2 min mit 5 l/min und 3 min mit 2 l/min: Insgesamt kommen _____ Liter dazu.

d) Anfangs 30 l. 4 min mit 6 l/min Zufluss: Danach sind _____ Liter im Behälter.

2 Kreuze an.

a) Ein Abfluss zählt in der Produktsumme _____. ☐ **positiv** ☐ **negativ**

b) Rate · Zeit ergibt die _____ des Bestands. ☐ **Anfangsbestand** ☐ **Rate** ☐ **Änderung**

c) l/min · min ergibt die Einheit _____. ☐ **l/min** ☐ **min²** ☐ **l**

3 Bestimme die Teilflächen und die orientierte Fläche (Dreiecke).

a) $f(x) = 2x - 6$ auf $[0 ; 5]$: Dreieck unter der Achse _____, Dreieck über der Achse _____, orientierte Fläche _____.

b) $f(x) = x - 2$ auf $[0 ; 4]$: Dreieck unter der Achse _____, Dreieck über der Achse _____, orientierte Fläche _____.

4 Berechne mit Dreiecken oder Rechtecken.

a) $f(x) = -x$ auf $[0 ; 4]$: orientierte Fläche _____.

b) Gesamter Flächeninhalt von $f(x) = 2x - 6$ auf $[0 ; 5]$: _____.

●●○ Standard

Summen, Integrale und Flächeninhaltsfunktion

5 **Berechne Untersumme und Obersumme. Nimm bei steigenden Funktionen den linken Rand für die Untersumme.**

a) $f(x) = x^2$ auf $[0 ; 3]$, 3 Streifen der Breite 1: Untersumme _____, Obersumme _____.

b) $f(x) = 2x$ auf $[0 ; 4]$, 4 Streifen der Breite 1: Untersumme _____, Obersumme _____.

6 **Berechne das Integral mit Hilfe von Flächen.**

a) $\int_0^6 x \, dx =$ _____

b) $\int_2^5 4 \, dx =$ _____

c) $\int_0^5 (4 - 2x) \, dx =$ _____

d) $\int_1^3 (2x + 1) \, dx =$ _____

7 **Flächeninhaltsfunktion $A(x) = \int_0^x f(t) \, dt$.**

a) $f(t) = 3$: $A(4) =$ _____

b) $f(t) = t$: $A(6) =$ _____

8 **Kreuze an.**

a) Ist f negativ, dann _____ die Flächeninhaltsfunktion. ☐ **fällt** ☐ **steigt**

b) Wechselt f von + nach –, hat A einen _____. ☐ **Hochpunkt** ☐ **Tiefpunkt**

c) Integrand in kW, Variable in h: Das Integral hat die Einheit _____. ☐ **kWh** ☐ **kW** ☐ **h**

9 Rechne und schreibe einen Antwortsatz.

a) Modell: Ein Teich hat anfangs 25 m^3 Wasser. Der Zufluss ist $f(t) = t$ in m^3 pro Stunde (t in Stunden, $0 \leq t \leq 6$). Wie viel Wasser enthält der Teich nach 6 Stunden?

Antwort:

b) Beschreibe den Graphen der Flächeninhaltsfunktion A zu $f(x) = x - 2$ auf $[0 ; 6]$. Wo fällt A, wo steigt A, wo liegt ein Extrempunkt?

Antwort:

●●● Plus

Integralfunktion genauer (vor allem für den Leistungskurs)

10 **Rechne und begründe.**

a) Zu $f(t) = t - 2$ gehört $I_0(x) = x^2/2 - 2x$. Bestimme die Integralfunktion I_2 mit Startwert 2 und berechne $I_2(4)$.

Antwort:

b) Bestimme für $I_0(x) = x^2/2 - 2x$ die Nullstellen und erkläre, warum I_0 bei $x = 2$ ein Extremum hat.

Antwort:

c) Zeige für $f(t) = t - 2$, dass $I_3(x) = x^2/2 - 2x + 1{,}5$ gilt, und berechne $I_3(5)$.

Antwort:

Kannst du das schon?

Kreuze an, wie sicher du dich fühlst. Hier gibt es kein Richtig oder Falsch.

Ich kann …	sicher	fast	noch nicht
Ich berechne Bestandsänderungen aus Raten.	☐	☐	☐
Ich bestimme orientierte Flächen und einfache Integrale.	☐	☐	☐
Ich skizziere Flächeninhaltsfunktionen.	☐	☐	☐
Ich deute Integrale im Sachkontext.	☐	☐	☐

Tipp: Bei „noch nicht“ schau dir „Kurz erklärt“ vorne im Heft noch einmal an oder scanne den Code auf dem Deckblatt. Dann probierst du die Aufgaben noch einmal.

Lösungen

Erst selbst rechnen, dann vergleichen. Bei den Rechenaufgaben steht der Rechenweg dabei.

●○○ Basis: Bestände aus Raten und orientierte Flächen

1 **Rechne Rate mal Zeit. Die Zahlen sind Modellwerte.**

a) **Zufluss 4 l/min für 5 min: Der Inhalt ändert sich um 20 Liter.**

b) **Änderungsrate −3 l/min für 6 min: Der Inhalt ändert sich um -18 Liter.**

c) **2 min mit 5 l/min und 3 min mit 2 l/min: Insgesamt kommen 16 Liter dazu.**

d) **Anfangs 30 l. 4 min mit 6 l/min Zufluss: Danach sind 54 Liter im Behälter.**

2 **Kreuze an.**

a) **negativ**

→ Ein Abfluss verkleinert den Bestand.

b) **Änderung**

→ Das Produkt sagt, wie viel dazukommt oder wegfällt.

c) **l**

→ Die Minuten kürzen sich weg.

3 **Bestimme die Teilflächen und die orientierte Fläche (Dreiecke).**

a) **f(x) = 2x − 6 auf [0 ; 5]: Dreieck unter der Achse 9, Dreieck über der Achse 4, orientierte Fläche -5.**

b) **f(x) = x − 2 auf [0 ; 4]: Dreieck unter der Achse 2, Dreieck über der Achse 2, orientierte Fläche 0.**

4 **Berechne mit Dreiecken oder Rechtecken.**

a) **f(x) = −x auf [0 ; 4]: orientierte Fläche -8.**

b) **Gesamter Flächeninhalt von f(x) = 2x − 6 auf [0 ; 5]: 13.**

●●○ Standard: Summen, Integrale und Flächeninhaltsfunktion

5 **Berechne Untersumme und Obersumme. Nimm bei steigenden Funktionen den linken Rand für die Untersumme.**

a) $f(x) = x^2$ auf $[0 ; 3]$, 3 Streifen der Breite 1:
Untersumme 5,
Obersumme 14.

b) $f(x) = 2x$ auf $[0 ; 4]$, 4 Streifen der Breite 1:
Untersumme 12,
Obersumme 20.

6 **Berechne das Integral mit Hilfe von Flächen.**

a) $\int_0^6 x\,dx = 18$

b) $\int_2^5 4\,dx = 12$

c) $\int_0^5 (4 - 2x)\,dx = -5$

d) $\int_1^3 (2x + 1)\,dx = 10$

7 **Flächeninhaltsfunktion $A(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.**

a) $f(t) = 3$: $A(4) = 12$

b) $f(t) = t$: $A(6) = 18$

8 **Kreuze an.**

a) **fällt**

→ Es geht Fläche verloren.

b) **Hochpunkt**

→ Davor steigt A, danach fällt sie.

c) **kWh**

→ kW · h = kWh.

9 **Rechne und schreibe einen Antwortsatz.**

a) **Nach 6 Stunden enthält der Teich 43 m³.**

→ Der Graph ist eine Gerade durch den Ursprung. Die Fläche ist ein Dreieck.

→ $\int_0^6 t\,dt = ½ \cdot 6 \cdot 6 = 18$. Es kommen 18 m³ dazu.

→ 25 + 18 = 43 m³.

b) **A fällt für $x < 2$, hat bei $x = 2$ einen Tiefpunkt ($A(2) = -2$) und steigt für $x > 2$.**

→ $f(x) = x - 2$ hat die Nullstelle $x = 2$. Davor ist f negativ, danach positiv.

→ Also fällt A bis $x = 2$ und steigt danach.

→ A(2): Dreieck unter der Achse mit Inhalt 2, also −2.

●●● Plus: Integralfunktion genauer (vor allem für den Leistungskurs)

10 **Rechne und begründe.**

a) **$I_2(x) = x^2/2 - 2x + 2$ und $I_2(4) = 2$.**

→ $I_0(2) = 2 - 4 = -2$.

→ $I_2(x) = I_0(x) - I_0(2) = x^2/2 - 2x + 2$.

→ $I_2(4) = 8 - 8 + 2 = 2$. Das passt zum Dreieck von 2 bis 4 mit Inhalt 2.

b) **Nullstellen bei $x = 0$ und $x = 4$. Bei $x = 2$ wechselt $f(t) = t - 2$ von − nach +, also hat I_0 dort einen Tiefpunkt.**

→ $x^2/2 - 2x = 0$ ergibt $x \cdot (x/2 - 2) = 0$, also $x = 0$ oder $x = 4$.

→ $I_0'(x) = f(x) = x - 2$ ist bei $x = 2$ null und wechselt das Vorzeichen von − nach +.

→ Also ist $x = 2$ ein Tiefpunkt.

c) **$I_3(x) = I_0(x) - I_0(3) = x^2/2 - 2x + 1{,}5$. Es ist $I_3(5) = 4$.**

→ $I_0(3) = 4{,}5 - 6 = -1{,}5$.

→ $I_3(x) = I_0(x) - (-1{,}5) = x^2/2 - 2x + 1{,}5$.

→ $I_3(5) = 12{,}5 - 10 + 1{,}5 = 4$.