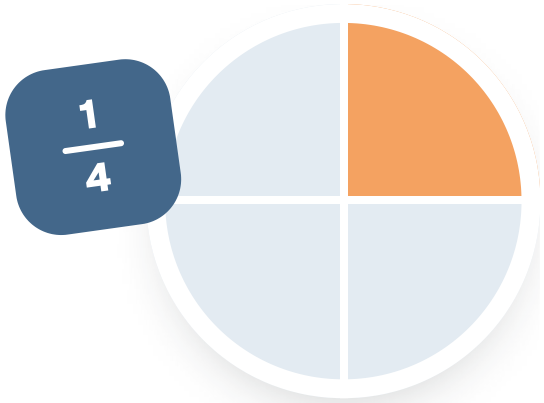
DYS+ Campus



Übungsheft · Mathe · Klasse 12

Hauptsatz und Stammfunktionen

Erklärungen, 32 Aufgaben in drei Stufen und alle Lösungen mit Rechenweg.

Name _____ **Datum** _____

Das lernst du

- Ich bilde Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen.
- Ich berechne Integrale mit dem Hauptsatz.
- Ich nutze Linearität und Intervalladditivität.
- Ich prüfe vorgegebene Stammfunktionen.

So arbeitest du mit dem Heft

●○○ **Basis** zum Einstieg

●●○ **Standard** zum Üben

●●● **Plus** zum Weiterdenken

Du musst nicht alles machen. Fang bei Basis an. Die Lösungen stehen hinten im Heft.

Noch unsicher?

Scanne den Code. Dort wird das Thema Schritt für Schritt erklärt.

dysplus.de/lernen/gymnasium/klasse-12/mathe/hauptsatz-und-stammfunktionen/was-ist-eine-stammfunktion

Kurz erklärt

Merksatz: F ist Stammfunktion von f, wenn $F' = f$. Potenzregel rückwärts: x^n hat die Stammfunktion $x^{n+1}/(n + 1)$. Hauptsatz: $\int$ von a bis b $f(x)\,dx = [F(x)]$ von a bis b $= F(b) - F(a)$.

Stammfunktionen im Überblick

f(x)	F(x) (ohne c)	Probe F′(x)
x^2	$x^3/3$	x^2
x^3	$x^4/4$	x^3
$6x^5$	x^6	$6x^5$
7	7x	7
$3x^2 + 4x - 5$	$x^3 + 2x^2 - 5x$	$3x^2 + 4x - 5$

$\int_{-1}^{2} (3x^2 + 2x)\,dx$ berechnen

1. Stammfunktion: $F(x) = x^3 + x^2$.
2. $F(2) = 8 + 4 = 12$.
3. $F(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 = 0$.
4. $12 - 0 = 12$.

Tipp: Prüfe jede Stammfunktion durch Ableiten. Setze negative Grenzen in Klammern ein.

Typischer Fehler: Beim Bilden der Stammfunktion wird oft nur der Exponent erhöht, aber nicht durch den neuen Exponenten geteilt. Beim Einsetzen werden die Grenzen vertauscht: Es heißt F(b) – F(a).

●○○ Basis

Stammfunktionen finden und prüfen

1 Ergänze. F ist eine Stammfunktion von f.

a) $F(x) = x^3$ ist eine Stammfunktion von $f(x) =$ _____ $\cdot x^2$.

b) $F(x) = x^2 + 5$ hat die Ableitung $F'(x) =$ _____ $\cdot x$.

c) Alle Stammfunktionen von $f(x) = 2x$ haben die Form $F(x) = x^2 +$ _____.

d) $F(x) = x^2 + c$ soll durch $P(1 \mid 5)$ gehen. Dann ist $c =$ _____.

2 Kreuze an.

a) F ist eine Stammfunktion von f, wenn _____ gleich f ist.

☐ **F** ☐ **f'** ☐ **F'**

b) Zwei Stammfunktionen derselben Funktion unterscheiden sich um eine _____.

☐ **Konstante** ☐ **Funktion mit x** ☐ **Ableitung**

c) Beim Ableiten fällt eine additive _____ weg.

☐ **Potenz** ☐ **Klammer** ☐ **Konstante**

3 Bilde eine Stammfunktion ohne Konstante c.

a) $f(x) = 6x^2 + 4x$: $F(x) =$ _____ $x^3 +$ _____ x^2.

b) $f(x) = 8x^3 - 3x^2$: $F(x) =$ _____ $x^4 - x^3$.

c) $f(x) = x^3$: $F(x) = x^4/$ _____.

d) $f(x) = 5$: $F(x) =$ _____ x.

e) $f(x) = 9x^2 - 2x + 1$: $F(x) =$ _____ $x^3 - x^2 +$ _____ x.

●●○ Standard

Integrale berechnen und Regeln nutzen

4 Berechne mit dem Hauptsatz.

a) $\int_0^3 2x\,dx =$ _____

b) $\int_1^4 3x^2\,dx =$ _____

c) $\int_{-1}^2 (3x^2 + 2x)\,dx =$ _____

d) $\int_0^2 (x^3 + x)\,dx =$ _____

e) $\int_0^3 (x^2 - 4)\,dx =$ _____

f) $\int_1^2 (6x^2 - 2x)\,dx =$ _____

5 Nutze die Rechenregeln. Es gilt $\int_0^2 f = 5$, $\int_2^5 f = -3$, $\int_0^2 g = 4$.

a) $\int_0^5 f(x)\,dx =$ _____

b) $\int_0^2 (3f(x) - 2g(x))\,dx =$ _____

6 Zerlege ein Integral.

a) Aus $\int_1^5 f = 8$ und $\int_1^3 f = 5$ folgt $\int_3^5 f =$ _____.

7 Kreuze an.

a) Es gilt $[F(x)]_a^b = F(b)$ _____ $F(a)$. ☐ **minus** ☐ **plus**

b) Die Regel $\int f \cdot g = \int f \cdot \int g$ _____. ☐ **gilt nicht** ☐ **gilt immer**

c) Nach dem Hauptsatz ist $A'(x) =$ _____. ☐ **F(x)** ☐ **f(x)** ☐ **A(x)**

8 Prüfe die vorgegebene Funktion $F(x) = x^4 - 2x^2$ und nutze sie.

a) $F'(x) =$ _____ $x^3 -$ _____ x.

b) Mit $f(x) = 4x^3 - 4x$ ist $\int_1^3 f(x)\,dx =$ _____ .

9 Rechne und begründe.

a) Prüfe, ob $F(x) = x^4 - x^2$ eine Stammfunktion von $f(x) = 4x^3 - x$ ist.

Antwort:

b) Bestimme die Stammfunktion F von $f(x) = 6x^2 - 2$ mit $F(1) = 4$.

Antwort:

c) $F(x) = x^2 + 7$ und $G(x) = x^2$ sind Stammfunktionen von $f(x) = 2x$. Zeige, dass sie für $\int_1^5 f$ dasselbe Ergebnis liefern.

Antwort:

Plus

Den Hauptsatz begründen (vor allem für den Leistungskurs)

10 **Rechne und begründe.**

a) Zu $f(x) = 2x$ gehört $A(x) = x^2$. Zeige $A'(3) = f(3)$ mit dem Differenzenquotienten $(A(3 + h) - A(3))/h$.

Antwort:

b) Gib für den Streifen von $x = 3$ bis $x = 3{,}5$ unter $f(x) = 2x$ den kleinsten Wert m, den größten Wert M und den Quotienten Fläche : h an. Zeige, dass der Quotient zwischen m und M liegt.

Antwort:

c) Erkläre in zwei Sätzen, warum man aus $A' = f$ und $F' = f$ schließen kann: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Antwort:

Kannst du das schon?

Kreuze an, wie sicher du dich fühlst. Hier gibt es kein Richtig oder Falsch.

Ich kann …	sicher	fast	noch nicht
Ich bilde Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen.	☐	☐	☐
Ich berechne Integrale mit dem Hauptsatz.	☐	☐	☐
Ich nutze Linearität und Intervalladditivität.	☐	☐	☐
Ich prüfe vorgegebene Stammfunktionen.	☐	☐	☐

Tipp: Bei „noch nicht“ schau dir „Kurz erklärt“ vorne im Heft noch einmal an oder scanne den Code auf dem Deckblatt. Dann probierst du die Aufgaben noch einmal.

Lösungen

Erst selbst rechnen, dann vergleichen. Bei den Rechenaufgaben steht der Rechenweg dabei.

●○○ Basis: Stammfunktionen finden und prüfen

1 Ergänze. F ist eine Stammfunktion von f.

a) $F(x) = x^3$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = 3 \cdot x^2$.

b) $F(x) = x^2 + 5$ hat die Ableitung $F'(x) = 2 \cdot x$.

c) Alle Stammfunktionen von $f(x) = 2x$ haben die Form $F(x) = x^2 + c$.

d) $F(x) = x^2 + c$ soll durch $P(1 \mid 5)$ gehen. Dann ist $c = 4$.

2 Kreuze an.

a) F′

→ Die Ableitung von F muss f ergeben.

b) Konstante

→ Die Differenz hat die Ableitung 0.

c) Konstante

→ Die Ableitung einer Zahl ist 0.

3 Bilde eine Stammfunktion ohne Konstante c.

a) $f(x) = 6x^2 + 4x$: $F(x) = 2x^3 + 2x^2$.

b) $f(x) = 8x^3 - 3x^2$: $F(x) = 2x^4 - x^3$.

c) $f(x) = x^3$: $F(x) = x^4/4$.

d) $f(x) = 5$: $F(x) = 5x$.

e) $f(x) = 9x^2 - 2x + 1$: $F(x) = 3x^3 - x^2 + 1x$.

●●○ Standard: Integrale berechnen und Regeln nutzen

4 Berechne mit dem Hauptsatz.

a) $\int_0^3 2x\,dx = 9$

b) $\int_1^4 3x^2\,dx = 63$

c) $\int_{-1}^2 (3x^2 + 2x)\,dx = 12$

d) $\int_0^2 (x^3 + x)\,dx = 6$

e) $\int_0^3 (x^2 - 4)\,dx = -3$

f) $\int_1^2 (6x^2 - 2x)\,dx = 11$

5 Nutze die Rechenregeln. Es gilt $\int_0^2 f = 5$, $\int_2^5 f = -3$, $\int_0^2 g = 4$.

a) $\int_0^5 f(x)\,dx = 2$

b) $\int_0^2 (3f(x) - 2g(x))\,dx = 7$

6 Zerlege ein Integral.

a) **Aus $\int_1^5 f = 8$ und $\int_1^3 f = 5$ folgt $\int_3^5 f = 3$.**

7 Kreuze an.

a) **minus**

→ Obere Grenze minus untere Grenze.

b) **gilt nicht**

→ Für Produkte gibt es keine solche Regel.

c) **f(x)**

→ Die Flächeninhaltsfunktion hat die Randfunktion als Ableitung.

8 Prüfe die vorgegebene Funktion $F(x) = x^4 - 2x^2$ und nutze sie.

a) **$F'(x) = 4x^3 - 4x$.**

b) **Mit $f(x) = 4x^3 - 4x$ ist $\int_1^3 f(x)\,dx = 64$.**

9 Rechne und begründe.

a) **Nein. $F'(x) = 4x^3 - 2x$ ist ungleich f(x).**

→ $F'(x) = 4x^3 - 2x$.

→ Der zweite Summand müsste $-x$ ergeben, nicht $-2x$.

→ Also ist F keine Stammfunktion von f.

b) **$F(x) = 2x^3 - 2x + 4$.**

→ Allgemein: $F(x) = 2x^3 - 2x + c$.

→ $F(1) = 2 - 2 + c = c = 4$.

→ $F(x) = 2x^3 - 2x + 4$.

c) **Beide ergeben 24.**

→ $F(5) - F(1) = 32 - 8 = 24$.

→ $G(5) - G(1) = 25 - 1 = 24$.

→ Die Konstante 7 hebt sich weg.

●●● Plus: Den Hauptsatz begründen (vor allem für den Leistungskurs)

10 **Rechne und begründe.**

a) **Der Quotient ist 6 + h und läuft für h → 0 gegen 6 = f(3).**

→ $A(3 + h) - A(3) = (3 + h)^2 - 9 = 6h + h^2$.

→ Teile durch h: 6 + h.

→ Für h → 0 geht der Wert gegen 6. Das ist f(3).

b) **m = 6, M = 7, Quotient 6,5.**

→ Auf [3 ; 3,5] steigt f von 6 auf 7. Also m = 6 und M = 7.

→ Fläche des Trapezes: $(6 + 7)/2 \cdot 0{,}5 = 3{,}25$. Quotient: $3{,}25 : 0{,}5 = 6{,}5$.

→ $6 \leq 6{,}5 \leq 7$.

c) **A – F ist konstant, also A(x) = F(x) + c. Wegen A(a) = 0 ist c = –F(a). Mit x = b folgt das Integral F(b) – F(a).**

→ $(A - F)' = f - f = 0$, also ist A – F konstant.

→ A(a) = 0 ergibt c = –F(a).

→ Setzt man x = b ein, erhält man $A(b) = \int_a^b f = F(b) - F(a)$.