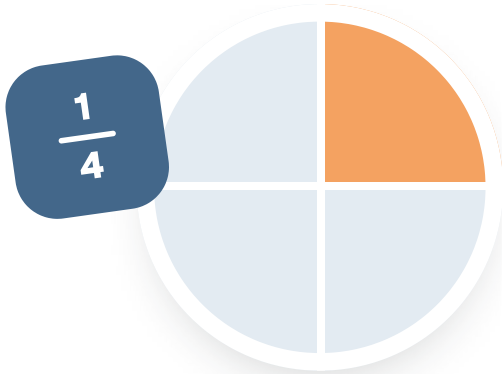
DYS+ Campus



Übungsheft · Mathe · Klasse 11

Ganzrationale Funktionen

Erklärungen, 42 Aufgaben in drei Stufen und alle Lösungen mit Rechenweg.

Name _____ **Datum** _____

Das lernst du

- Ich beschreibe Potenzfunktionen mit natürlichen und negativen Exponenten.
- Ich bestimme Grad, Leitkoeffizient und das Verhalten für $x \to \pm\infty$.
- Ich prüfe die Symmetrie eines Graphen.
- Ich berechne Nullstellen ohne Hilfsmittel.

So arbeitest du mit dem Heft

●○○ **Basis** zum Einstieg

●●○ **Standard** zum Üben

●●● **Plus** zum Weiterdenken

Du musst nicht alles machen. Fang bei Basis an. Die Lösungen stehen hinten im Heft.

Noch unsicher?

Scanne den Code. Dort wird das Thema Schritt für Schritt erklärt.

dysplus.de/lernen/gymnasium/klasse-11/mathe/ganzrationale-funktionen/potenzfunktionen-natuerliche-exponenten

Kurz erklärt

Merksatz: Ganzrational: $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots$ Grad = höchster Exponent. Leitkoeffizient = Zahl vor der höchsten Potenz.

Verhalten für $x \to \pm\infty$

Grad	Leitkoeffizient	$x \to -\infty$	$x \to +\infty$
gerade	positiv	$+\infty$	$+\infty$
gerade	negativ	$-\infty$	$-\infty$
ungerade	positiv	$-\infty$	$+\infty$
ungerade	negativ	$+\infty$	$-\infty$

Nullstellen von $x^3 - 4x$

1. Ausklammern: $x \cdot (x^2 - 4) = 0$.
2. Nullprodukt: $x = 0$ oder $x^2 = 4$.
3. Die Nullstellen sind -2, 0 und 2.

Tipp: Nur gerade Exponenten (auch das absolute Glied): symmetrisch zur y-Achse. Nur ungerade Exponenten: symmetrisch zum Ursprung.

Typischer Fehler: Teile nie durch x, wenn $x = 0$ eine Lösung sein kann. Klammere stattdessen aus. Und x^{-2} bedeutet $1/x^2$, nicht $-x^2$.

●○○ Basis

Potenzfunktionen und ganzrationale Funktionen

1 Berechne den Funktionswert.

a) $f(x) = x^4$. $f(-2) =$ _____

b) $f(x) = x^3$. $f(-3) =$ _____

c) $f(x) = x^5$. $f(2) =$ _____

d) $f(x) = x^2$. $f(-5) =$ _____

e) $f(x) = x^7$. $f(-1) =$ _____

2 Kreuze an.

a) Der Graph von $f(x) = x^6$ ist symmetrisch _____. ☐ **zum Ursprung** ☐ **zur y-Achse**

b) Der Graph von $f(x) = x^5$ ist symmetrisch _____. ☐ **zur y-Achse** ☐ **zum Ursprung**

c) Der Graph von $f(x) = x^4$ liegt _____ der x-Achse. ☐ **auch unter** ☐ **auf oder über**

d) Der Graph von $f(x) = x^3$ liegt _____ der x-Achse. ☐ **auch unter** ☐ **nur auf oder über**

3 Gib Grad und Leitkoeffizient an.

a) $f(x) = 4x^3 - x + 2$. Grad _____, Leitkoeffizient _____

b) $f(x) = 5 - 2x^2$. Grad _____, Leitkoeffizient _____

c) $f(x) = 7x - 2x^3 + x^2$. Grad _____, Leitkoeffizient _____

d) $f(x) = -x^5 + 3x^4$. Grad _____, Leitkoeffizient _____

4 **x^{-n} bedeutet $1/x^n$. Berechne und gib das Ergebnis als Dezimalzahl an.**

a) $f(x) = x^{-1}$. $f(4) =$ _____

b) $f(x) = x^{-3}$. $f(-2) =$ _____

c) $f(x) = x^{-2}$. $f(0{,}5) =$ _____

●●○ Standard

Verhalten, Symmetrie und Nullstellen

5 Wohin geht f(x)? Kreuze an.

a) $f(x) = x^3 - 5x$. Für $x \to \infty$ geht f gegen _____. ☐ $-\infty$ ☐ $+\infty$

b) $f(x) = x^3 - 5x$. Für $x \to -\infty$ geht f gegen _____. ☐ $-\infty$ ☐ $+\infty$

c) $f(x) = -2x^4 + x$. Für $x \to \infty$ geht f gegen _____. ☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$

d) $f(x) = -x^5 + x$. Für $x \to -\infty$ geht f gegen _____. ☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$

6 **Welche Symmetrie hat der Graph?**

a) $f(x) = x^4 - x^2$. Der Graph ist _____.

☐ **symmetrisch zur y-Achse** ☐ **symmetrisch zum Ursprung** ☐ **weder noch**

b) $f(x) = x^3 + x$. Der Graph ist _____.

☐ **symmetrisch zur y-Achse** ☐ **weder noch** ☐ **symmetrisch zum Ursprung**

c) $f(x) = x^2 + x$. Der Graph ist _____.

☐ **weder noch** ☐ **symmetrisch zur y-Achse** ☐ **symmetrisch zum Ursprung**

d) $f(x) = x^3 + 1$. Der Graph ist _____.

☐ **weder noch** ☐ **symmetrisch zum Ursprung** ☐ **symmetrisch zur y-Achse**

7 Löse die Gleichung. Gib die Lösungen von klein nach groß an.

a) $x^2 - 7x = 0$. $x_1 =$ _____ , $x_2 =$ _____

b) $x^3 - x = 0$. $x_1 =$ _____ , $x_2 =$ _____ , $x_3 =$ _____

c) $3x^2 - 12x = 0$. $x_1 =$ _____ , $x_2 =$ _____

d) $x^3 - 16x = 0$. $x_1 =$ _____ , $x_2 =$ _____ , $x_3 =$ _____

e) $x^3 - 9x^2 = 0$. $x_1 =$ _____ , $x_2 =$ _____

8 Rechne und schreibe einen Antwortsatz.

a) Bestimme die Nullstellen von $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$.

Antwort:

b) Bestimme die Nullstellen von $f(x) = x^4 - x^3 - 6x^2$.

Antwort:

c) Zeige, dass der Graph von $f(x) = x^5 - 3x^3$ symmetrisch zum Ursprung ist.

Antwort:

●●● Plus

Terme, Graphen und Argumente

9 Begründe mit Eigenschaften.

a) Ein Graph hat beide Enden oben, geht durch den Ursprung und hat die Nullstellen –2 und 2. Welcher Term passt: A: $x^4 - 4x^2$, B: $-x^4 + 4x^2$, C: $x^3 - 4x$?

Antwort:

b) Eine Funktion dritten Grades hat den Leitkoeffizienten 1 und die Nullstellen –1, 0 und 2. Gib den Term an.

Antwort:

c) Bestimme alle Nullstellen von $f(x) = (x^2 + 1) \cdot (x^2 - 4)$.

Antwort:

10 **Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe die richtige Fassung auf.**

a) Der Graph von $f(x) = x^3 + x^2$ ist symmetrisch zum Ursprung. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

b) Bei $f(x) = -x^2 + 5x$ ist der Leitkoeffizient 5. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

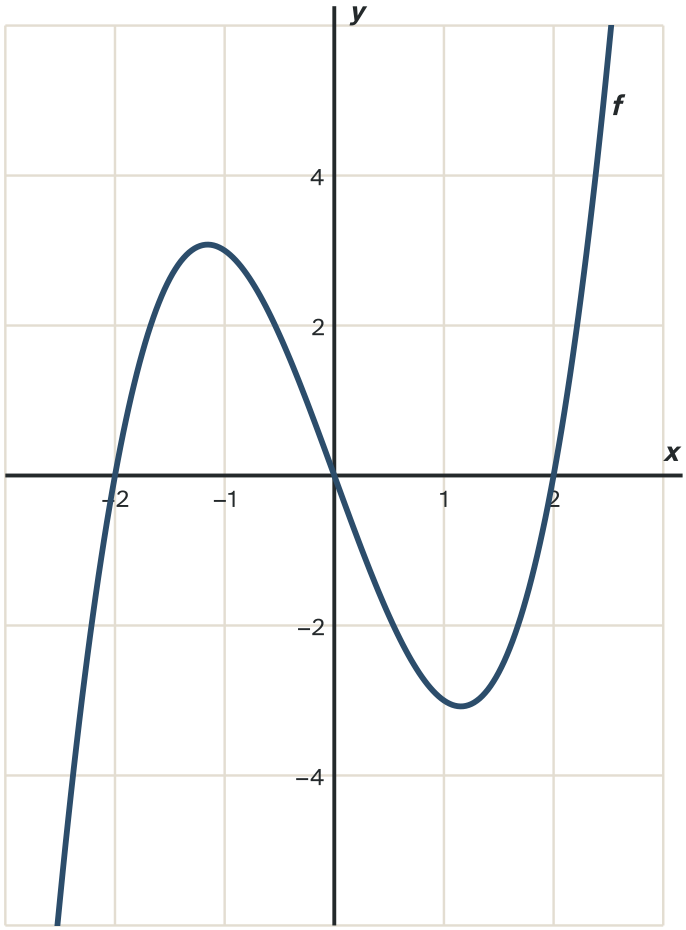
c) x^{-2} ist dasselbe wie $-x^2$. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

d) Aus $x^2 = 3x$ folgt $x = 3$. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

e) Die Funktion $f(x) = x^4$ geht für $x \to -\infty$ gegen $+\infty$. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

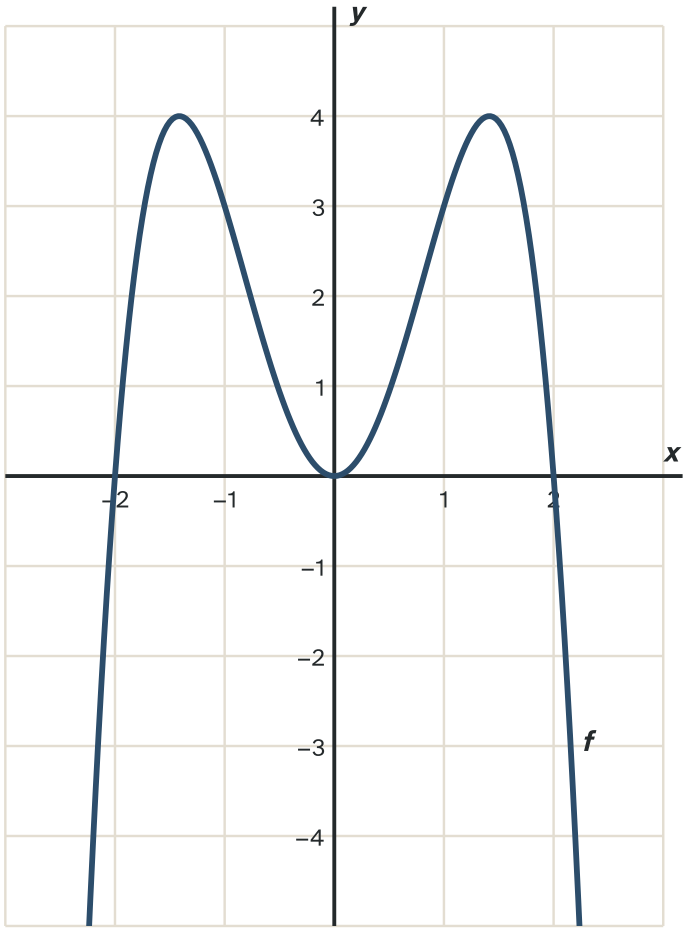
11 **Lies am Graphen ab.**

a)



Nullstellen:

b)



Die Enden zeigen nach ☐ .

Kannst du das schon?

Kreuze an, wie sicher du dich fühlst. Hier gibt es kein Richtig oder Falsch.

Ich kann …	sicher	fast	noch nicht
Ich beschreibe Potenzfunktionen mit natürlichen und negativen Exponenten.	☐	☐	☐
Ich bestimme Grad, Leitkoeffizient und das Verhalten für $x \to \pm\infty$.	☐	☐	☐
Ich prüfe die Symmetrie eines Graphen.	☐	☐	☐
Ich berechne Nullstellen ohne Hilfsmittel.	☐	☐	☐

Tipp: Bei „noch nicht“ schau dir „Kurz erklärt“ vorne im Heft noch einmal an oder scanne den Code auf dem Deckblatt. Dann probierst du die Aufgaben noch einmal.

Lösungen

Erst selbst rechnen, dann vergleichen. Bei den Rechenaufgaben steht der Rechenweg dabei.

●○○ Basis: Potenzfunktionen und ganzrationale Funktionen

1 Berechne den Funktionswert.

a) **$f(x) = x^4$. $f(-2) = 16$**

→ $(-2)^4 = 16$.

b) **$f(x) = x^3$. $f(-3) = -27$**

→ $(-3)^3 = -27$.

c) **$f(x) = x^5$. $f(2) = 32$**

→ $2^5 = 32$.

d) **$f(x) = x^2$. $f(-5) = 25$**

→ $(-5)^2 = 25$.

e) **$f(x) = x^7$. $f(-1) = -1$**

→ $(-1)^7 = -1$, denn der Exponent ist ungerade.

2 Kreuze an.

a) **zur y-Achse**

→ Der Exponent 6 ist gerade.

b) **zum Ursprung**

→ Der Exponent 5 ist ungerade.

c) **auf oder über**

→ x^4 ist nie negativ.

d) **auch unter**

→ Für negatives x ist x^3 negativ.

3 Gib Grad und Leitkoeffizient an.

a) **$f(x) = 4x^3 - x + 2$. Grad 3, Leitkoeffizient 4**

b) **$f(x) = 5 - 2x^2$. Grad 2, Leitkoeffizient −2**

→ Die höchste Potenz ist x^2. Davor steht −2.

c) **$f(x) = 7x - 2x^3 + x^2$. Grad 3, Leitkoeffizient −2**

→ Die höchste Potenz ist x^3, nicht die erste im Term.

d) **$f(x) = -x^5 + 3x^4$. Grad 5, Leitkoeffizient −1**

4 x^{-n} bedeutet $1/x^n$. Berechne und gib das Ergebnis als Dezimalzahl an.

a) **$f(x) = x^{-1}$. $f(4) = 0{,}25$**

→ $\frac{1}{4} = 0{,}25$.

b) **$f(x) = x^{-3}$. $f(-2) = -0{,}125$**

→ $1/(-8) = -0{,}125$.

c) **$f(x) = x^{-2}$. $f(0{,}5) = 4$**

→ $1/0{,}25 = 4$.

●●○ Standard: Verhalten, Symmetrie und Nullstellen

5 Wohin geht f(x)? Kreuze an.

a) $+\infty$

→ Ungerader Grad, positiver Leitkoeffizient.

b) $-\infty$

→ Ungerader Grad: die Enden zeigen in entgegengesetzte Richtungen.

c) $-\infty$

→ Gerader Grad, negativer Leitkoeffizient.

d) $+\infty$

→ Ungerader Grad, negativer Leitkoeffizient.

6 Welche Symmetrie hat der Graph?

a) **symmetrisch zur y-Achse**

→ Nur gerade Exponenten.

b) **symmetrisch zum Ursprung**

→ Nur ungerade Exponenten.

c) **weder noch**

→ Gerade und ungerade Exponenten kommen vor.

d) **weder noch**

→ Das absolute Glied 1 hat den geraden Exponenten 0.

7 Löse die Gleichung. Gib die Lösungen von klein nach groß an.

a) $x^2 - 7x = 0$. $x_1 = 0$, $x_2 = 7$

→ $x \cdot (x - 7) = 0$.

b) $x^3 - x = 0$. $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$

→ $x \cdot (x^2 - 1) = 0$.

c) $3x^2 - 12x = 0$. $x_1 = 0$, $x_2 = 4$

→ $3x \cdot (x - 4) = 0$.

d) $x^3 - 16x = 0$. $x_1 = -4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$

→ $x \cdot (x^2 - 16) = 0$.

e) $x^3 - 9x^2 = 0$. $x_1 = 0$, $x_2 = 9$

→ $x^2 \cdot (x - 9) = 0$. Die 0 ist eine doppelte Lösung, zählt aber nur einmal.

8 Rechne und schreibe einen Antwortsatz.

a) **0, 1 und 3**

→ Ausklammern: $x \cdot (x^2 - 4x + 3) = 0$.

→ $x = 0$ oder $x^2 - 4x + 3 = 0$.

→ p-q-Formel: $x = 2 \pm \sqrt{(4 - 3)} = 2 \pm 1$, also $x = 1$ oder $x = 3$.

b) **−2, 0 und 3**

→ Ausklammern: $x^2 \cdot (x^2 - x - 6) = 0$. Aus $x^2 = 0$ folgt $x = 0$.

→ p-q-Formel: $x = 0{,}5 \pm \sqrt{(0{,}25 + 6)} = 0{,}5 \pm 2{,}5$, also $x = 3$ oder $x = -2$.

c) **f(−x) = −f(x)**

→ $f(-x) = (-x)^5 - 3 \cdot (-x)^3 = -x^5 + 3x^3$.

→ Das ist $-(x^5 - 3x^3) = -f(x)$.

→ Also ist der Graph symmetrisch zum Ursprung.

●●● Plus: Terme, Graphen und Argumente

9 Begründe mit Eigenschaften.

a) A

→ Beide Enden oben: gerader Grad und positiver Leitkoeffizient. B und C scheiden aus.

→ Probe bei A: $x^2 \cdot (x^2 - 4) = 0$ ergibt $x = 0$ oder $x = \pm 2$.

b) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$

→ $f(x) = x \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)$.

→ $(x + 1) \cdot (x - 2) = x^2 - x - 2$.

→ $x \cdot (x^2 - x - 2) = x^3 - x^2 - 2x$.

c) –2 und 2

→ Satz vom Nullprodukt: $x^2 + 1 = 0$ oder $x^2 - 4 = 0$.

→ $x^2 + 1 = 0$ hat keine Lösung, denn $x^2 + 1$ ist immer mindestens 1. $x^2 - 4 = 0$ liefert $x = \pm 2$.

10 Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe die richtige Fassung auf.

a) Stimmt nicht. Richtig: Gerade und ungerade Exponenten kommen vor. Der Graph ist weder noch.

b) Stimmt nicht. Richtig: Der Leitkoeffizient steht vor der höchsten Potenz x^2. Er ist –1.

c) Stimmt nicht. Richtig: $x^{-2} = 1/x^2$. Das Minus im Exponenten bedeutet den Kehrwert.

d) Stimmt nicht. Richtig: Auch $x = 0$ ist eine Lösung. Bringe alles auf eine Seite und klammere x aus.

e) Stimmt.

11 Lies am Graphen ab.

a) –2, 0 und 2

b) unten