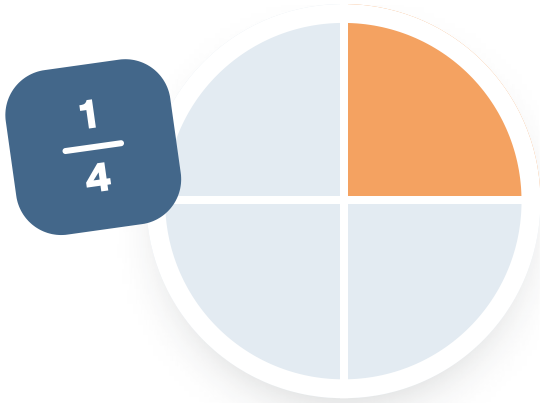
DYS+ Campus



Übungsheft · Mathe · Klasse 12

Flächen und Bestände berechnen

Erklärungen, 29 Aufgaben in drei Stufen und alle Lösungen mit Rechenweg.

Name _____ **Datum** _____

Das lernst du

- Ich berechne Flächeninhalte zwischen Graph und x-Achse und zwischen zwei Graphen.
- Ich bestimme Bestände und Mittelwerte aus Änderungsraten.
- Ich löse Sachaufgaben mit Integralen.
- Ich berechne einfache uneigentliche Integrale und Rotationsvolumina.

So arbeitest du mit dem Heft

●○○ **Basis** zum Einstieg

●●○ **Standard** zum Üben

●●● **Plus** zum Weiterdenken

Du musst nicht alles machen. Fang bei Basis an. Die Lösungen stehen hinten im Heft.

Noch unsicher?

Scanne den Code. Dort wird das Thema Schritt für Schritt erklärt.

dysplus.de/lernen/gymnasium/klasse-12/mathe/flaechen-und-bestaende-berechnen/flaeche-zwischen-graph-und-x-achse

Kurz erklärt

Merksatz: Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse: an den Nullstellen zerlegen, Beträge der Teilintegrale addieren. Zwischen zwei Graphen: $\int$ (obere – untere) dx, Grenzen sind die Schnittstellen. Bestand: $B(t) = B(0) + \int_0^t f(s)\,ds$. Mittelwert: Integral geteilt durch (b – a).

Überblick

Aufgabe	Vorgehen	Beispiel
Fläche zur x-Achse	Nullstellen, Teilintegrale, Beträge	$x^3 - 4x$ auf $[-2;2]$: 4 + 4 = 8
Fläche zwischen Graphen	Differenz obere – untere	$3x^2$ und $6x$: 4
Bestand	Anfangsbestand + Integral	20 + 25 = 45
Mittelwert	Integral : Länge	16 : 4 = 4

Fläche zwischen $f(x) = 3x^2$ und $g(x) = 6x$

1. Schnittstellen: $3x^2 = 6x$ ergibt $x = 0$ und $x = 2$.
2. Bei $x = 1$ ist $g(1) = 6$ über $f(1) = 3$.
3. $d(x) = 6x - 3x^2$. Stammfunktion: $3x^2 - x^3$.
4. $[3x^2 - x^3]_0^2 = 12 - 8 = 4$.

Tipp: Zeichne eine Skizze, bevor du rechnest. Prüfe mit einem Zwischenwert, welcher Graph oben liegt.

Typischer Fehler: Über ein Intervall mit Vorzeichenwechsel wird einfach integriert. Dann heben sich Teile auf. Auch wird der Anfangsbestand vergessen oder der Mittelwert durch b statt durch b – a geteilt.

●○○ Basis

Flächen zwischen Graph und x-Achse

1 Berechne. Nutze die Stammfunktion.

a) $f(x) = 3x^2$ auf $[0 ; 2]$ liegt über der Achse. Flächeninhalt: _____

b) $f(x) = 2x$ auf $[1 ; 4]$ liegt über der Achse. Flächeninhalt: _____

c) $f(x) = x^3 - 4x$ auf $[-2 ; 2]$: Das Integral ist _____, der Flächeninhalt ist _____.

d) $f(x) = 2x - 2$ auf $[0 ; 1]$: Das Integral ist _____, der Flächeninhalt ist _____.

2 Kreuze an.

a) Liegt der Graph unterhalb der x-Achse, ist das Integral _____. ☐ **negativ** ☐ **positiv**

b) Bei einem Vorzeichenwechsel zerlegt man an den _____. ☐ **Extremstellen** ☐ **Wendestellen** ☐ **Nullstellen**

c) Der Flächeninhalt ist die Summe der _____ der Teilintegrale. ☐ **Beträge** ☐ **Quadrate** ☐ **Wurzeln**

3 Bestimme die Nullstellen.

a) $f(x) = x^2 - 4$ hat die Nullstellen $x =$ _____ und $x =$ _____.

b) $f(x) = x^3 - x$ hat die Nullstellen -1, 0 und _____.

●●○ Standard

Zwischen Graphen, Bestände und Mittelwerte

4 Fläche zwischen zwei Graphen.

a) $f(x) = 6x$ und $g(x) = x^2$ schneiden sich bei 0 und _____.

b) $f(x) = 3x^2$ und $g(x) = 6x$ schließen die Fläche _____ ein.

c) $f(x) = 3x^2$ und $g(x) = 12$ schneiden sich bei -2 und _____. Fläche: _____.

d) $f(x) = -x^2 + 4$ und $g(x) = x + 2$ schließen die Fläche _____ ein.

5 Bestand aus der Änderungsrate (Modellwerte).

a) Anfangs 20 l, Zufluss 2t l/min, 5 min: B(5) = _____ l.

b) Anfangs 100 l, Änderungsrate $-6t^2$ l/min, 3 min: B(3) = _____ l.

c) $B(t) = 50 + 6t^2 - t^3$: B(3) = _____.

6 Berechne den Mittelwert.

a) $f(x) = 2x$ auf $[0 ; 4]$: _____

b) $f(x) = 3x^2$ auf $[1 ; 3]$: _____

c) $v(t) = 6t - t^2$ auf $[0 ; 6]$: _____ m/s

7 Kreuze an.

a) Der Mittelwert ist das Integral geteilt durch _____. ☐ **b – a** ☐ **b** ☐ **a**

b) Ein Abfluss zählt in der Gesamtrate _____. ☐ **negativ** ☐ **positiv**

c) Eine Rate in m^3/h, integriert über h, ergibt die Einheit _____. ☐ **m^3/h** ☐ **h** ☐ **m^3**

8 Rechne und schreibe einen Antwortsatz.

a) Modell: Die Verkehrsstärke ist $q(t) = 60 - 5t^2$ Fahrzeuge pro Minute, $0 \leq t \leq 3$. Wie viele Fahrzeuge kommen in den 3 Minuten vorbei?

Antwort:

b) Modell: Ein Becken enthält 800 l. 5 Minuten lang fließen $z(t) = 20 - 4t$ Liter pro Minute zu und konstant 6 Liter pro Minute ab. Wie viele Liter sind danach im Becken?

Antwort:

c) Berechne den Inhalt der Fläche, die die Graphen von $f(x) = x^2$ und $g(x) = 4$ einschließen.

Antwort:

●●● Plus

Uneigentliche Integrale und Rotationskörper (vor allem für den Leistungskurs)

9 Rechne und begründe.

a) Berechne $\int$ von 1 bis ∞ $x^{-2}\,dx$. Zeige zuerst $\int_1^b x^{-2}\,dx = 1 - 1/b$.

Antwort:

b) Berechne $\int$ von 2 bis ∞ $4x^{-3}\,dx$.

Antwort:

c) Berechne das Volumen, das bei Drehung von $f(x) = 2x$ auf $[0\,;\,3]$ um die x-Achse entsteht.

Antwort:

d) Zeige, dass die Drehung von $f(x) = x$ auf $[0 ; 6]$ das Volumen eines Kegels mit $r = 6$ und $h = 6$ liefert.

Antwort:

Kannst du das schon?

Kreuze an, wie sicher du dich fühlst. Hier gibt es kein Richtig oder Falsch.

Ich kann …	sicher	fast	noch nicht
Ich berechne Flächeninhalte zwischen Graph und x-Achse und zwischen zwei Graphen.	☐	☐	☐
Ich bestimme Bestände und Mittelwerte aus Änderungsraten.	☐	☐	☐
Ich löse Sachaufgaben mit Integralen.	☐	☐	☐
Ich berechne einfache uneigentliche Integrale und Rotationsvolumina.	☐	☐	☐

Tipp: Bei „noch nicht“ schau dir „Kurz erklärt“ vorne im Heft noch einmal an oder scanne den Code auf dem Deckblatt. Dann probierst du die Aufgaben noch einmal.

Lösungen

Erst selbst rechnen, dann vergleichen. Bei den Rechenaufgaben steht der Rechenweg dabei.

●○○ Basis: Flächen zwischen Graph und x-Achse

1 Berechne. Nutze die Stammfunktion.

a) **$f(x) = 3x^2$ auf $[0 ; 2]$ liegt über der Achse. Flächeninhalt: 8**

b) **$f(x) = 2x$ auf $[1 ; 4]$ liegt über der Achse. Flächeninhalt: 15**

c) **$f(x) = x^3 - 4x$ auf $[-2 ; 2]$: Das Integral ist 0, der Flächeninhalt ist 8.**

d) **$f(x) = 2x - 2$ auf $[0 ; 1]$: Das Integral ist -1, der Flächeninhalt ist 1.**

2 Kreuze an.

a) **negativ**

→ Die orientierte Fläche ist negativ.

b) **Nullstellen**

→ Dort wechselt f das Vorzeichen.

c) **Beträge**

→ So zählt jeder Teil positiv.

3 Bestimme die Nullstellen.

a) **$f(x) = x^2 - 4$ hat die Nullstellen $x = -2$ und $x = 2$.**

b) **$f(x) = x^3 - x$ hat die Nullstellen -1, 0 und 1.**

●●○ Standard: Zwischen Graphen, Bestände und Mittelwerte

4 Fläche zwischen zwei Graphen.

a) **$f(x) = 6x$ und $g(x) = x^2$ schneiden sich bei 0 und 6.**

b) **$f(x) = 3x^2$ und $g(x) = 6x$ schließen die Fläche 4 ein.**

c) **$f(x) = 3x^2$ und $g(x) = 12$ schneiden sich bei -2 und 2. Fläche: 32.**

d) **$f(x) = -x^2 + 4$ und $g(x) = x + 2$ schließen die Fläche 4,5 ein.**

5 Bestand aus der Änderungsrate (Modellwerte).

a) **Anfangs 20 l, Zufluss 2t l/min, 5 min: B(5) = 45 l.**

b) **Anfangs 100 l, Änderungsrate $-6t^2$ l/min, 3 min: B(3) = 46 l.**

c) **$B(t) = 50 + 6t^2 - t^3$: B(3) = 77.**

6 Berechne den Mittelwert.

a) **$f(x) = 2x$ auf $[0\,;\,4]$: 4**

b) **$f(x) = 3x^2$ auf $[1\,;\,3]$: 13**

c) **$v(t) = 6t - t^2$ auf $[0\,;\,6]$: 6 m/s**

7 Kreuze an.

a) **b − a**

→ Man teilt durch die Länge des Intervalls.

b) **negativ**

→ Er verkleinert den Bestand.

c) **m^3**

→ Die Stunden kürzen sich weg.

8 Rechne und schreibe einen Antwortsatz.

a) **In den 3 Minuten kommen 135 Fahrzeuge vorbei.**

→ Stammfunktion: $60t - 5t^3/3$.

→ $[60t - 5t^3/3]_0^3 = 180 - 45 = 135$.

b) **Nach 5 Minuten sind 820 Liter im Becken.**

→ Zufluss: $[20t - 2t^2]_0^5 = 100 - 50 = 50$.

→ Abfluss: $6 \cdot 5 = 30$.

→ $800 + 50 - 30 = 820$.

c) **Die Fläche beträgt $\frac{32}{3}$, also etwa 10,67.**

→ $x^2 = 4$ ergibt $x = -2$ und $x = 2$. Dazwischen liegt g oben.

→ $d(x) = 4 - x^2$. Stammfunktion: $4x - x^3/3$.

→ $D(2) = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$. $D(-2) = -\frac{16}{3}$.

→ $\frac{16}{3} - (-\frac{16}{3}) = \frac{32}{3}$.

●●● Plus: Uneigentliche Integrale und Rotationskörper (vor allem für den Leistungskurs)

9 Rechne und begründe.

a) Der Wert ist 1.

→ Stammfunktion: $-x^{-1} = -1/x$.

→ $\int_1^b x^{-2}\,dx = -1/b - (-1) = 1 - 1/b$.

→ Für $b \to \infty$ geht $1/b$ gegen 0. Der Grenzwert ist 1.

b) Der Wert ist 0,5.

→ Stammfunktion: $-2x^{-2}$.

→ $\int_2^b = -2/b^2 + \frac{2}{4}$.

→ Für $b \to \infty$ bleibt 0,5.

c) V = 36π.

→ $(f(x))^2 = 4x^2$.

→ $V = \pi \cdot [4x^3/3]_0^3 = \pi \cdot 36$.

d) Beide Rechnungen ergeben 72π.

→ Integral: $\pi \cdot [x^3/3]_0^6 = \pi \cdot 72$.

→ Kegelformel: $\pi \cdot r^2 \cdot h/3 = \pi \cdot 36 \cdot \frac{6}{3} = 72\pi$.