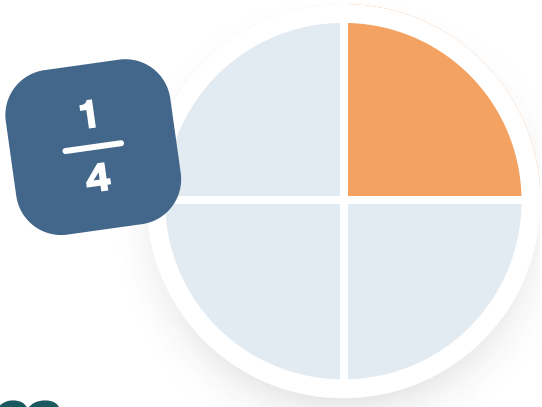
DYS+ Campus



Übungsheft · Mathe · Klasse 11

Monotonie, Extrem- und Wendepunkte

Erklärungen, 41 Aufgaben in drei Stufen und alle Lösungen mit Rechenweg.

Name _____ **Datum** _____

Das lernst du

- Ich beschreibe Monotonie mit dem Vorzeichen von f′.
- Ich unterscheide Extremstelle, Extremwert und Extrempunkt und lokale und globale Extrema.
- Ich bestimme Hoch- und Tiefpunkte mit f′ und mit f″.
- Ich bestimme Krümmung, Wendepunkte und Wendetangenten.

So arbeitest du mit dem Heft

●○○ **Basis** zum Einstieg

●●○ **Standard** zum Üben

●●● **Plus** zum Weiterdenken

Du musst nicht alles machen. Fang bei Basis an. Die Lösungen stehen hinten im Heft.

Noch unsicher?

Scanne den Code. Dort wird das Thema Schritt für Schritt erklärt.

dysplus.de/lernen/gymnasium/klasse-11/mathe/extrem-und-wendepunkte/monotonie-und-vorzeichen

Kurz erklärt

Merksatz: $f' > 0$: f steigt. $f' < 0$: f fällt. Extremstelle: $f'(x_0) = 0$ und dazu ein Vorzeichenwechsel von f' oder $f''(x_0) \neq 0$. $f'' > 0$: Linkskurve. $f'' < 0$: Rechtskurve. Wendestelle: $f''(x_0) = 0$ mit Vorzeichenwechsel von f''.

Begriffe

Begriff	Bedeutung
Extremstelle	x-Wert
Extremwert	y-Wert, f(x)
Extrempunkt	Punkt mit beiden Koordinaten

Hoch- und Tiefpunkt von $f(x) = x^3 - 12x$

1. $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$ ergibt $x = -2$ oder $x = 2$.
2. $f''(x) = 6x$. $f''(-2) = -12 < 0$: Hochpunkt. $f''(2) = 12 > 0$: Tiefpunkt.
3. $f(-2) = 16$ und $f(2) = -16$: H(–2 | 16) und T(2 | –16).

Tipp: Setze Testzahlen immer in f' ein, nicht in f. Rechne bei Extrema den Funktionswert aus, damit du den Punkt angeben kannst.

Typischer Fehler: Aus $f'(x_0) = 0$ folgt noch kein Extremum. Bei $f(x) = x^3$ ist $f'(0) = 0$, und es liegt ein Sattelpunkt vor. Auch $f''(x_0) = 0$ allein beweist keinen Wendepunkt.

●○○ Basis

Monotonie und Extremwerte

1 Kreuze an.

a) Gilt $f'(x) > 0$ auf einem Intervall, ist der Graph dort ☐ **fallend** ☐ **steigend**

_____.

b) Es ist $f'(-1) = -4$. Bei $x = -1$ ist der Graph _____. ☐ **fallend** ☐ **steigend**

c) Der Graph steigt und fällt dann wieder. Dort liegt ein ☐ **Hochpunkt** ☐ **Tiefpunkt**

_____.

d) Der Graph fällt und steigt dann wieder. Dort liegt ein ☐ **Hochpunkt** ☐ **Tiefpunkt**

_____.

2 Löse $f'(x) = 0$ und gib die Stelle an.

a) $f(x) = x^2 - 6x$, $f'(x) = 2x - 6$: $x =$ _____

b) $f(x) = x^2 + 8x$, $f'(x) = 2x + 8$: $x =$ _____

c) $f(x) = -x^2 + 10x$, $f'(x) = -2x + 10$: $x =$ _____

d) $f(x) = 2x^2 - 12x$, $f'(x) = 4x - 12$: $x =$ _____

3 Der Hochpunkt oder Tiefpunkt liegt an der Stelle aus der letzten Aufgabe. Gib den Extremwert an.

a) $f(x) = x^2 - 6x$ bei $x = 3$: $f(3) =$ _____

b) $f(x) = x^2 + 8x$ bei $x = -4$: $f(-4) =$ _____

c) $f(x) = -x^2 + 10x$ bei $x = 5$: $f(5) =$ _____

d) $f(x) = 2x^2 - 12x$ bei $x = 3$: $f(3) =$ _____

●●○ Standard

Extrempunkte bestimmen

4 **Berechne die Werte der Ableitung für die Vorzeichentabelle.**

a) $f(x) = x^3 - 3x$, $f'(x) = 3x^2 - 3$: $f'(-2) =$ _____

b) $f(x) = x^3 - 3x$, $f'(x) = 3x^2 - 3$: $f'(0) =$ _____

c) $f(x) = x^3 - 12x$, $f'(x) = 3x^2 - 12$: $f'(-3) =$ _____

d) $f(x) = x^3 - 12x$, $f'(x) = 3x^2 - 12$: $f'(3) =$ _____

5 **Löse $f'(x) = 0$. Gib die kleinere Stelle zuerst an.**

a) $f(x) = x^3 - 12x$: $x =$ _____ und $x =$ _____

b) $f(x) = x^3 - 27x$: $x =$ _____ und $x =$ _____

c) $f(x) = x^3 - 3x^2$: $x =$ _____ und $x =$ _____

d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$: $x =$ _____ und $x =$ _____

6 **Gib die y-Koordinaten von Hochpunkt H und Tiefpunkt T an. Der Hochpunkt liegt links.**

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$: H(1 | _____) und T(3 | _____)

b) $f(x) = x^3 - 12x$: H(−2 | _____) und T(2 | _____)

c) $f(x) = x^3 - 3x$: H(−1 | _____) und T(1 | _____)

7 Entscheide mit der zweiten Ableitung.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, $f''(x) = 6x - 12$. Es ist $f''(1) = -6$.

Bei $x = 1$ liegt ein _____.

☐ **Hochpunkt** ☐ **Tiefpunkt**

b) Für dieselbe Funktion ist $f''(3) = 6$. Bei $x = 3$ liegt ein

_____.

☐ **Hochpunkt** ☐ **Tiefpunkt**

c) In einer Linkskurve gilt $f''(x)$ _____ 0.

☐ **<** ☐ **>**

8 Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe ihn richtig auf.

a) Aus $f'(x_0) = 0$ folgt immer, dass bei x_0 ein Extremum liegt.

☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

b) Wechselt f' bei x_0 von minus nach plus, liegt dort ein Tiefpunkt.

☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

c) Der Extremwert ist die x-Koordinate des Hochpunkts.

☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

d) Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, liegt bei x_0 ein Hochpunkt.

☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

e) Das globale Maximum auf einem Intervall liegt immer bei einer Stelle mit $f'(x) = 0$.

☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

●●● Plus

Wendepunkte, Sattelpunkte und Begründungen

9 Löse f″(x) = 0 und gib die Wendestelle an.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$, $f''(x) = 6x - 6$: x = _____

b) $f(x) = x^3 - 9x^2$, $f''(x) = 6x - 18$: x = _____

c) $f(x) = x^3 + 3x^2$, $f''(x) = 6x + 6$: x = _____

10 Gib die y-Koordinate des Wendepunkts an.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$ bei x = 1: y = _____

b) $f(x) = x^3 - 6x^2$ bei x = 2: y = _____

c) $f(x) = x^3 - 9x^2$ bei x = 3: y = _____

11 Rechne ohne Hilfsmittel und schreibe das Ergebnis auf.

a) Bestimme Hoch- und Tiefpunkt von $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$.

Antwort:

b) Zeige: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ hat keinen Extrempunkt, aber einen Sattelpunkt.

Antwort:

c) Bestimme Wendepunkt und Wendetangente von $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

Antwort:

d) Begründe: $f(x) = x^4$ hat bei 0 einen Tiefpunkt, obwohl $f''(0) = 0$ ist.

Antwort:

Kannst du das schon?

Kreuze an, wie sicher du dich fühlst. Hier gibt es kein Richtig oder Falsch.

Ich kann …	sicher	fast	noch nicht
Ich beschreibe Monotonie mit dem Vorzeichen von f′.	☐	☐	☐
Ich unterscheide Extremstelle, Extremwert und Extrempunkt und lokale und globale Extrema.	☐	☐	☐
Ich bestimme Hoch- und Tiefpunkte mit f′ und mit f″.	☐	☐	☐
Ich bestimme Krümmung, Wendepunkte und Wendetangenten.	☐	☐	☐

Tipp: Bei „noch nicht“ schau dir „Kurz erklärt“ vorne im Heft noch einmal an oder scanne den Code auf dem Deckblatt. Dann probierst du die Aufgaben noch einmal.

Lösungen

Erst selbst rechnen, dann vergleichen. Bei den Rechenaufgaben steht der Rechenweg dabei.

●○○ Basis: Monotonie und Extremwerte

1 **Kreuze an.**

a) **steigend**

→ Positive Steigung bedeutet: Der Graph steigt.

b) **fallend**

→ Negative Steigung bedeutet: Der Graph fällt.

c) **Hochpunkt**

→ Erst nach oben, dann nach unten: Das ist ein Hochpunkt.

d) **Tiefpunkt**

→ Erst nach unten, dann nach oben: Das ist ein Tiefpunkt.

2 **Löse $f'(x) = 0$ und gib die Stelle an.**

a) $f(x) = x^2 - 6x$, $f'(x) = 2x - 6$: $x = 3$

b) $f(x) = x^2 + 8x$, $f'(x) = 2x + 8$: $x = -4$

c) $f(x) = -x^2 + 10x$, $f'(x) = -2x + 10$: $x = 5$

d) $f(x) = 2x^2 - 12x$, $f'(x) = 4x - 12$: $x = 3$

3 **Der Hochpunkt oder Tiefpunkt liegt an der Stelle aus der letzten Aufgabe. Gib den Extremwert an.**

a) $f(x) = x^2 - 6x$ bei $x = 3$: $f(3) = -9$

b) $f(x) = x^2 + 8x$ bei $x = -4$: $f(-4) = -16$

c) $f(x) = -x^2 + 10x$ bei $x = 5$: $f(5) = 25$

d) $f(x) = 2x^2 - 12x$ bei $x = 3$: $f(3) = -18$

●●○ Standard: Extrempunkte bestimmen

4 **Berechne die Werte der Ableitung für die Vorzeichentabelle.**

a) $f(x) = x^3 - 3x$, $f'(x) = 3x^2 - 3$: $f'(-2) = 9$

b) $f(x) = x^3 - 3x$, $f'(x) = 3x^2 - 3$: $f'(0) = -3$

c) $f(x) = x^3 - 12x$, $f'(x) = 3x^2 - 12$: $f'(-3) = 15$

d) $f(x) = x^3 - 12x$, $f'(x) = 3x^2 - 12$: $f'(3) = 15$

5 **Löse $f'(x) = 0$. Gib die kleinere Stelle zuerst an.**

a) $f(x) = x^3 - 12x$: $x = -2$ und $x = 2$

b) $f(x) = x^3 - 27x$: $x = -3$ und $x = 3$

c) $f(x) = x^3 - 3x^2$: $x = 0$ und $x = 2$

d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$: $x = 1$ und $x = 3$

6 **Gib die y-Koordinaten von Hochpunkt H und Tiefpunkt T an. Der Hochpunkt liegt links.**

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$: H(1 | 4) und T(3 | 0)

b) $f(x) = x^3 - 12x$: H(−2 | 16) und T(2 | −16)

c) $f(x) = x^3 - 3x$: H(−1 | 2) und T(1 | −2)

7 **Entscheide mit der zweiten Ableitung.**

a) **Hochpunkt**

→ $f''(1)$ ist negativ.

b) **Tiefpunkt**

→ $f''(3)$ ist positiv.

c) **>**

→ Bei Linkskurven nimmt die Steigung zu, also ist f'' positiv.

8 **Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe ihn richtig auf.**

a) **Stimmt nicht. Richtig: Das stimmt nicht. $f'(x_0) = 0$ ist nur notwendig. Bei $f(x) = x^3$ ist $f'(0) = 0$, aber es gibt kein Extremum.**

b) **Stimmt.**

c) **Stimmt nicht. Richtig: Der Extremwert ist der y-Wert $f(x_0)$. Die x-Koordinate heißt Extremstelle.**

d) **Stimmt.**

e) **Stimmt nicht. Richtig: Es kann auch am Rand des Intervalls liegen.**

●●● Plus: Wendepunkte, Sattelpunkte und Begründungen

9 **Löse $f''(x) = 0$ und gib die Wendestelle an.**

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$, $f''(x) = 6x - 6$: $x = 1$

b) $f(x) = x^3 - 9x^2$, $f''(x) = 6x - 18$: $x = 3$

c) $f(x) = x^3 + 3x^2$, $f''(x) = 6x + 6$: $x = -1$

10 **Gib die y-Koordinate des Wendepunkts an.**

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$ bei $x = 1$: $y = -2$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2$ bei $x = 2$: $y = -16$

c) $f(x) = x^3 - 9x^2$ bei $x = 3$: $y = -54$

11 **Rechne ohne Hilfsmittel und schreibe das Ergebnis auf.**

a) **H(–1 | 5) und T(3 | –27)**

→ $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3 \cdot (x + 1) \cdot (x - 3)$. Also $x = -1$ oder $x = 3$.

→ $f''(x) = 6x - 6$. $f''(-1) = -12 < 0$: Hochpunkt. $f''(3) = 12 > 0$: Tiefpunkt.

→ $f(-1) = -1 - 3 + 9 = 5$ und $f(3) = 27 - 27 - 27 = -27$.

b) **S(1 | 1) ist ein Sattelpunkt.**

→ $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3 \cdot (x - 1)^2$. Nur $x = 1$ ist Nullstelle von f'.

→ f' ist links und rechts von 1 positiv: kein Vorzeichenwechsel, kein Extremum.

→ $f(1) = 1 - 3 + 3 = 1$. Wegen $f'(1) = 0$ und $f''(x) = 6x - 6$ mit Wechsel bei $x = 1$ ist S(1 | 1) ein Sattelpunkt.

c) **W(2 | 2), Wendetangente $y = -3x + 8$**

→ $f''(x) = 6x - 12 = 0$ ergibt $x = 2$. f'' wechselt das Vorzeichen.

→ $f(2) = 8 - 24 + 18 = 2$. $f'(2) = 12 - 24 + 9 = -3$.

→ $y = -3 \cdot (x - 2) + 2 = -3x + 8$.

d) **$f'(x) = 4x^3$ wechselt bei 0 von – nach +.**

→ $f'(x) = 4x^3$ und $f''(x) = 12x^2$. Es ist $f''(0) = 0$, das Kriterium sagt nichts.

→ $f'(-1) = -4 < 0$ und $f'(1) = 4 > 0$: Vorzeichenwechsel von – nach +.

→ Also liegt bei $x = 0$ ein Tiefpunkt.