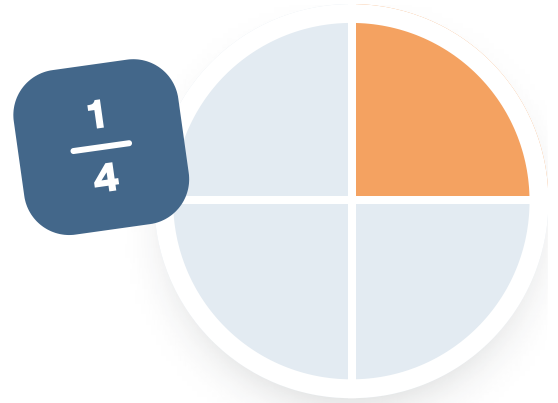




Übungsheft • Mathe • Klasse 10

Exponentielles Wachstum

Erklärungen, 47 Aufgaben in drei Stufen und alle Lösungen mit Rechenweg.

Name _____ Datum _____

Das lernst du

- Ich rechne mit Startwert und Faktor.
- Ich lese $f(x) = a \cdot b^x$ ab.
- Ich rechne mit Verdopplungs- und Halbwertszeit.
- Ich unterscheide die Wachstumsarten und kenne Grenzen des Modells.

So arbeitest du mit dem Heft

- **Basis** zum Einstieg
- **Standard** zum Üben
- **Plus** zum Weiterdenken

Du musst nicht alles machen.
Fang bei Basis an. Die Lösungen stehen hinten im Heft.



Noch unsicher?

Scanne den Code. Dort wird das Thema Schritt für Schritt erklärt.

dysplus.de/lernen/realschule/klasse-10/mathe/exponentielles-wachstum/wachsen-mit-festem-faktor

Kurz erklärt

Merksatz: Exponentielles Wachstum: $f(x) = a \cdot b^x$. a ist der Startwert, b der Faktor. $b > 1$ heißt Wachstum, $0 < b < 1$ heißt Zerfall.

Prozent und Faktor

Änderung	Faktor
Zunahme um 10 %	1,1
Zunahme um 50 %	1,5
Abnahme um 20 %	0,8
Abnahme um 25 %	0,75

Funktion aus einer Tabelle

- 1 $f(0) = 4$, $f(1) = 12$, $f(2) = 36$.
- 2 $a = 4$. Faktor: $12 : 4 = 3$.
- 3 $f(x) = 4 \cdot 3^x$.
- 4 Probe: $f(2) = 4 \cdot 9 = 36$.

Halbwertszeit

- 1 Start 640 g, Halbwertszeit 4 Tage.
- 2 Nach 12 Tagen sind 3 Halbwertszeiten vorbei.
- 3 $640 : 2 : 2 : 2 = 80$ g.

Tipp: Linear: gleiche Differenzen. Quadratisch: gleiche zweite Differenzen.
Exponentiell: gleiche Quotienten.

Typischer Fehler: Bei 20 % Abnahme ist der Faktor 0,8, nicht 0,2. Und $5 \cdot 3^2$ ist 45, nicht $(5 \cdot 3)^2 = 225$.

Faktor und Folgen

1 Ergänze die Folgen. Jeder Wert ist der vorherige mal der Faktor.

- a) Start 2, Faktor 3: 2, 6, _____, _____, _____
- b) Start 3, Faktor 2: 3, 6, _____, _____, _____
- c) Start 5, Faktor 2: 5, 10, _____, _____, _____
- d) Start 1, Faktor 4: 1, 4, _____, _____, _____
- e) Start 4, Faktor 3: 4, 12, _____, _____, _____

2 Berechne Startwert · Faktor hoch t.

- a) Start 4, Faktor 2, $t = 3$: $4 \cdot 2^3 =$ _____
- b) Start 3, Faktor 3, $t = 2$: $3 \cdot 3^2 =$ _____
- c) Start 10, Faktor 2, $t = 4$: $10 \cdot 2^4 =$ _____
- d) Start 2, Faktor 5, $t = 3$: $2 \cdot 5^3 =$ _____
- e) Start 5, Faktor 2, $t = 5$: $5 \cdot 2^5 =$ _____

3

Wächst die Folge gleichmäßig (immer dieselbe Zahl addiert) oder mit festem Faktor?

a) 2, 4, 8, 16: _____

☐ fester Faktor ☐ gleichmäßig

b) 5, 8, 11, 14: _____

☐ fester Faktor ☐ gleichmäßig

c) 1, 3, 9, 27: _____

☐ fester Faktor ☐ gleichmäßig

d) 10, 20, 30, 40: _____

☐ fester Faktor ☐ gleichmäßig

e) 80, 40, 20, 10: _____

☐ fester Faktor ☐ gleichmäßig

Funktionen, Prozent und Zeitspannen

4 Berechne den Funktionswert.

a) $f(x) = 3 \cdot 2^x$: $f(4) =$ _____

b) $f(x) = 4 \cdot 3^x$: $f(2) =$ _____

c) $f(x) = 2 \cdot 5^x$: $f(3) =$ _____

d) $f(x) = 5 \cdot 2^x$: $f(3) =$ _____

e) $f(x) = 1 \cdot 10^x$: $f(4) =$ _____

5 Gib den Wachstumsfaktor an.

a) Zunahme um 10 %: Faktor _____

b) Abnahme um 20 %: Faktor _____

c) Zunahme um 50 %: Faktor _____

d) Abnahme um 25 %: Faktor _____

e) Abnahme um 10 %: Faktor _____

6 Berechne mit Verdopplungszeit oder Halbwertszeit.

a) Start 100, Verdopplungszeit 2 Tage, nach 6 Tagen: _____

b) Start 7, Verdopplungszeit 10 Minuten, nach 40 Minuten: _____

c) Start 960 g, Halbwertszeit 3 Tage, nach 9 Tagen: _____ g

d) Start 2 400 g, Halbwertszeit 2 Stunden, nach 6 Stunden: _____ g

e) Start 5, Verdopplungszeit 1 Jahr, nach 5 Jahren: _____

7**Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe ihn richtig auf.**

a) Bei $f(x) = 3 \cdot 2^x$ ist 3 der Wachstumsfaktor. ☐ stimmt ☐ stimmt nicht

b) Eine Abnahme um 20 % gehört zum Faktor 0,8. ☐ stimmt ☐ stimmt nicht

c) Nach zwei Halbwertszeiten ist nichts mehr übrig. ☐ stimmt ☐ stimmt nicht

d) Die Verdopplungszeit ist bei größeren Werten länger. ☐ stimmt ☐ stimmt nicht

Wachstumsarten, Modelle und Sachaufgaben

8 Linear, quadratisch oder exponentiell? Die x-Werte sind 0, 1, 2, 3, 4.

- a) y-Werte 2, 6, 18, 54, 162: _____ ☐ quadratisch ☐ exponentiell ☐ linear
- b) y-Werte 5, 9, 13, 17, 21: _____ ☐ linear ☐ quadratisch ☐ exponentiell
- c) y-Werte 0, 1, 4, 9, 16: _____ ☐ quadratisch ☐ exponentiell ☐ linear
- d) y-Werte 1, 2, 4, 8, 16: _____ ☐ exponentiell ☐ linear ☐ quadratisch
- e) y-Werte 3, 4, 7, 12, 19: _____ ☐ linear ☐ quadratisch ☐ exponentiell

9 Bestimme die Funktion $f(x) = a \cdot b^x$ aus der Tabelle. Gib a und b an.

- a) $f(0) = 4$, $f(1) = 8$, $f(2) = 16$: $a =$ _____, $b =$ _____
- b) $f(0) = 5$, $f(1) = 15$, $f(2) = 45$: $a =$ _____, $b =$ _____
- c) $f(0) = 100$, $f(1) = 50$, $f(2) = 25$: $a =$ _____, $b =$ _____
- d) $f(0) = 2$, $f(1) = 10$, $f(2) = 50$: $a =$ _____, $b =$ _____

10 Rechne und schreibe einen Antwortsatz.

- a) Eine Hefekultur bedeckt 3 cm^2 und verdoppelt sich täglich. Wie groß ist die Fläche nach 6 Tagen?

Antwort:

- b)** Ein Gegenstand im Wert von 10 000 € verliert jedes Jahr 10 % an Wert. Wie viel ist er nach 3 Jahren wert?

Antwort:

- c)** Eine Kultur verdoppelt sich alle 4 Stunden. Nach wie vielen Stunden sind aus 5 Zellen erstmals mehr als 100 geworden?

Antwort:

- d)** Das Modell $f(t) = 2 \cdot 2^t$ sagt für eine Schale mit 200 cm² nach 10 Tagen 2 048 cm² voraus. Erkläre, was daran nicht stimmt.

Antwort:

Kannst du das schon?

Kreuze an, wie sicher du dich fühlst. Hier gibt es kein Richtig oder Falsch.

Ich kann ...	sicher	fast	noch nicht
Ich rechne mit Startwert und Faktor.	☐	☐	☐
Ich lese $f(x) = a \cdot b^x$ ab.	☐	☐	☐
Ich rechne mit Verdopplungs- und Halbwertszeit.	☐	☐	☐
Ich unterscheide die Wachstumsarten und kenne Grenzen des Modells.	☐	☐	☐

Tipp: Bei „noch nicht“ schau dir „Kurz erklärt“ vorne im Heft noch einmal an oder scanne den Code auf dem Deckblatt. Dann probierst du die Aufgaben noch einmal.

Lösungen

Erst selbst rechnen, dann vergleichen. Bei den Rechenaufgaben steht der Rechenweg dabei.

●○○ Basis: Faktor und Folgen

1 Ergänze die Folgen. Jeder Wert ist der vorherige mal der Faktor.

- a) Start 2, Faktor 3: 2, 6, 18, 54, 162 b) Start 3, Faktor 2: 3, 6, 12, 24, 48 c) Start 5, Faktor 2: 5, 10, 20, 40, 80
- d) Start 1, Faktor 4: 1, 4, 16, 64, 256 e) Start 4, Faktor 3: 4, 12, 36, 108, 324

2 Berechne Startwert $\cdot$ Faktor hoch t.

- a) Start 4, Faktor 2, t = 3: $4 \cdot 2^3 = 32$ b) Start 3, Faktor 3, t = 2: $3 \cdot 3^2 = 27$ c) Start 10, Faktor 2, t = 4: $10 \cdot 2^4 = 160$
- d) Start 2, Faktor 5, t = 3: $2 \cdot 5^3 = 250$ e) Start 5, Faktor 2, t = 5: $5 \cdot 2^5 = 160$

3 Wächst die Folge gleichmäßig (immer dieselbe Zahl addiert) oder mit festem Faktor?

- a) **fester Faktor**
→ Jeder Wert ist das Doppelte des vorherigen.
- b) **gleichmäßig**
→ Es kommt immer 3 dazu.
- c) **fester Faktor**
→ Jeder Wert ist das Dreifache des vorherigen.
- d) **gleichmäßig**
→ Es kommen immer 10 dazu.
- e) **fester Faktor**
→ Jeder Wert ist die Hälfte des vorherigen (Faktor 0,5).

●●○ Standard: Funktionen, Prozent und Zeitspannen

4 Berechne den Funktionswert.

- a) $f(x) = 3 \cdot 2^x$: $f(4) = 48$ b) $f(x) = 4 \cdot 3^x$: $f(2) = 36$ c) $f(x) = 2 \cdot 5^x$: $f(3) = 250$
- d) $f(x) = 5 \cdot 2^x$: $f(3) = 40$ e) $f(x) = 1 \cdot 10^x$: $f(4) = 10\,000$

5 Gib den Wachstumsfaktor an.

- a) Zunahme um 10 %: Faktor 1,1 b) Abnahme um 20 %: Faktor 0,8 c) Zunahme um 50 %: Faktor 1,5
- d) Abnahme um 25 %: Faktor 0,75 e) Abnahme um 10 %: Faktor 0,9

6 Berechne mit Verdopplungszeit oder Halbwertszeit.

- a) Start 100, Verdopplungszeit 2 Tage, nach 6 Tagen: 800 b) Start 7, Verdopplungszeit 10 Minuten, nach 40 Minuten: 112 c) Start 960 g, Halbwertszeit 3 Tage, nach 9 Tagen: 120 g
- d) Start 2 400 g, Halbwertszeit 2 Stunden, nach 6 Stunden: 300 g e) Start 5, Verdopplungszeit 1 Jahr, nach 5 Jahren: 160

7 Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe ihn richtig auf.

- a) Stimmt nicht. Richtig: Bei $f(x) = 3 \cdot 2^x$ ist 3 der Startwert und 2 der Wachstumsfaktor. b) Stimmt. c) Stimmt nicht. Richtig: Nach zwei Halbwertszeiten ist noch ein Viertel übrig.
- d) Stimmt nicht. Richtig: Die Verdopplungszeit ist immer gleich lang.

●●● **Plus: Wachstumsarten, Modelle und Sachaufgaben**

8 Linear, quadratisch oder exponentiell? Die x-Werte sind 0, 1, 2, 3, 4.

- a) **exponentiell** b) **linear**
→ Die Quotienten sind immer 3. → Die Differenzen sind immer 4.
- c) **quadratisch** d) **exponentiell**
→ Die zweiten Differenzen sind immer 2. → Die Quotienten sind immer 2.
- e) **quadratisch**
→ Differenzen 1, 3, 5, 7. Zweite Differenzen 2.

9 Bestimme die Funktion $f(x) = a \cdot b^x$ aus der Tabelle. Gib a und b an.

- a) $f(0) = 4, f(1) = 8, f(2) = 16$: $a = 4, b = 2$ b) $f(0) = 5, f(1) = 15, f(2) = 45$: $a = 5, b = 3$ c) $f(0) = 100, f(1) = 50, f(2) = 25$: $a = 100, b = 0,5$
- d) $f(0) = 2, f(1) = 10, f(2) = 50$: $a = 2, b = 5$

10 Rechne und schreibe einen Antwortsatz.

a) 192 cm^2

→ $f(t) = 3 \cdot 2^t$.

→ $2^6 = 64$.

→ $3 \cdot 64 = 192 \text{ cm}^2$.

c) Nach 20 Stunden (160 Zellen)

→ Werte: 5, 10, 20, 40, 80, 160.

→ Nach 4 Verdopplungen sind es 80, nach 5 sind es 160.

→ $5 \cdot 4 \text{ Stunden} = 20 \text{ Stunden}$.

b) 7 290 €

→ Faktor: $1 - 0,1 = 0,9$.

→ $0,9^3 = 0,729$.

→ $10\ 000 \cdot 0,729 = 7\ 290 \text{ €}$.

d) Die Schale fasst nur 200 cm^2 . Das Modell gilt nur, solange die Fläche in die Schale passt.

→ Vergleiche $2\ 048 \text{ cm}^2$ mit 200 cm^2 .

→ Die Vorhersage ist größer als die Schale.

→ Das Modell gilt nur bis etwa zum 6. Tag.