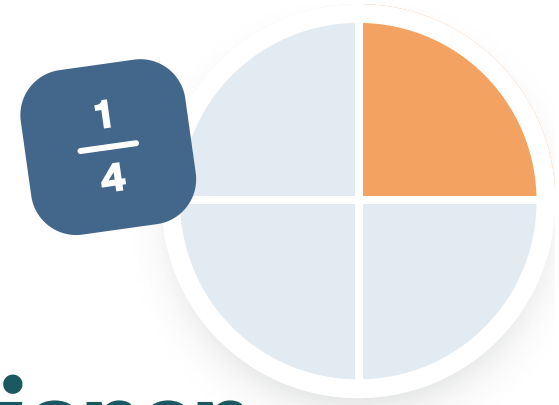
DYS+ Campus



Übungsheft · Mathe · Klasse 13

Exponentialfunktionen und Wachstum

Erklärungen, 41 Aufgaben in drei Stufen und alle Lösungen mit Rechenweg.

Name _____ **Datum** _____

Das lernst du

- Ich beschreibe Eigenschaften von a^x und e^x.
- Ich leite e^x und e^(mx+n) ab.
- Ich deute a, k und S in Wachstumsmodellen.
- Ich beurteile ein Modell anhand von Messwerten.

So arbeitest du mit dem Heft

●○○ **Basis** zum Einstieg

●●○ **Standard** zum Üben

●●● **Plus** zum Weiterdenken

Du musst nicht alles machen. Fang bei Basis an. Die Lösungen stehen hinten im Heft.

Noch unsicher?

Scanne den Code. Dort wird das Thema Schritt für Schritt erklärt.

dysplus.de/lernen/gymnasium/klasse-13/mathe/exponentialfunktionen-und-wachstum/exponentialfunktionen-a-hoch-x

Kurz erklärt

Merksatz: f(x) = a^x: D = $\mathbb{R}$, W = {y | y > 0}, Punkt (0 | 1). $(e^x)' = e^x$. (e^(mx+n))′ = m·e^(mx+n). Unbegrenzt: f(t) = a·e^(kt), f′ = k·f. Begrenzt: f(t) = S – c·e^(–kt), f′ = k·(S – f).

Verdopplungs- und Halbwertszeit

Vorgang	Bedingung	Zeit T
Wachstum	k > 0	0,693 / k
Zerfall	k < 0	0,693 / |k|

f(t) = 40·e^(0,1t): Anfangswert und Änderungsrate

1. Anfangswert: f(0) = 40 · e^0 = 40.
2. Ableitung: f′(t) = 0,1 · 40 · e^(0,1t) = 4·e^(0,1t).
3. Änderungsrate am Anfang: f′(0) = 4.

Tipp: Frage immer: Steht x im Exponenten oder in der Basis? Im Exponenten: Exponentialfunktion, die Ableitung bekommt den Faktor aus dem Exponenten.

Typischer Fehler: (e^(3x))′ ist nicht e^(3x), sondern 3·e^(3x). Und die Potenzregel gilt nicht für e^x.

●○○ Basis

a^x, die Zahl e und das Ableiten

1 Berechne den Funktionswert. Brüche als Dezimalzahl.

a) $f(x) = 2^x$. $f(5) =$ _____

b) $f(x) = 10^x$. $f(-3) =$ _____

c) $f(x) = 0{,}5^x$. $f(3) =$ _____

d) $f(x) = 4^x$. $f(0) =$ _____

e) $f(x) = 2^x$. $f(-3) =$ _____

2 Kreuze an.

a) Die Funktion $f(x) = 0{,}9^x$ _____. ☐ **wächst** ☐ **fällt**

b) Der Graph von $f(x) = 5^x$ liegt _____ der x-Achse. ☐ **oberhalb** ☐ **auch unterhalb**

c) Alle Graphen von a^x gehen durch _____. ☐ **(1 | 0)** ☐ **(0 | 1)**

d) Der Wertebereich von a^x ist _____. ☐ **alle reellen Zahlen** ☐ **y > 0**

3 Berechne mit dem Taschenrechner auf zwei Nachkommastellen.

a) $e^2 \approx$ _____

b) $e^{-1} \approx$ _____

c) e^(0,5) ≈ _____

4 **Leite ab und berechne f′(0).**

a) $f(x) = 4e^x$. $f'(0) =$ _____

b) $f(x) = e^x + x^2$. $f'(0) =$ _____

c) $f(x) = 3e^x - 6x$. $f'(0) =$ _____

d) $f(x) = e^x - x$ hat einen Tiefpunkt bei $x =$ _____

●●○ Standard

Kettenregel, Wachstum und begrenztes Wachstum

5 **Leite ab und berechne den Wert.**

a) f(x) = e^(2x). f′(0) = _____

b) f(x) = e^(−3x). f′(0) = _____

c) f(x) = 5e^(0,2x). f′(0) = _____

d) f(x) = e^(4x−2). f′(0,5) = _____

6 **Modell: N(t) = 200·e^(0,05t). Berechne.**

a) N(0) = _____

b) N′(0) = _____

7 **Verdopplungs- und Halbwertszeit. Nutze ln 2 ≈ 0,693.**

a) k = 0,0693. Die Verdopplungszeit ist _____

b) k = −0,0231. Die Halbwertszeit ist _____

c) Aus 100 werden nach drei Verdopplungszeiten _____

8 **Begrenztes Wachstum: f(t) = 100 − 60·e^(−0,1t).**

a) f(0) = _____

b) Die Schranke ist S = _____

c) f′(0) = _____

9 Beschreibe in Worten.

a) Modell (fiktiv): Die Menge eines Stoffes sinkt nach m(t) = 80·e^(−0,05t) (t in Stunden, m in mg). Wie schnell nimmt die Menge zu Beginn ab?

Antwort:

b) Ein Modell sagt für t = 2 den Wert 168,2 voraus, der Messwert ist 166. Wie groß ist die Abweichung (Modell minus Messwert)? Wie beurteilst du sie?

Antwort:

10 Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe die richtige Fassung auf.

a) Die Ableitung von e^(3x) ist e^(3x). ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

b) Bei f(t) = a·e^(kt) mit k < 0 handelt es sich um Zerfall. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

c) Ein begrenztes Wachstum hat am Anfang die kleinste Änderungsrate. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

●●● Plus

Wachstumsmodelle vergleichen (vor allem für den Leistungskurs)

11 Welches Modell? Kreuze an.

a) Es gilt $f'(t) = 5$ (konstant). Das Modell ist _____.

☐ **linear** ☐ **exponentiell** ☐ **begrenzt**

b) Es gilt $f'(t) = 0{,}1 \cdot f(t)$. Das Modell ist _____.

☐ **begrenzt** ☐ **exponentiell** ☐ **linear**

c) Es gilt $f'(t) = 0{,}2 \cdot (50 - f(t))$. Das Modell ist _____.

☐ **linear** ☐ **exponentiell** ☐ **begrenzt**

12 Vergleich: h(t) = 100·e^(0,1t) und g(t) = 100 + 20t.

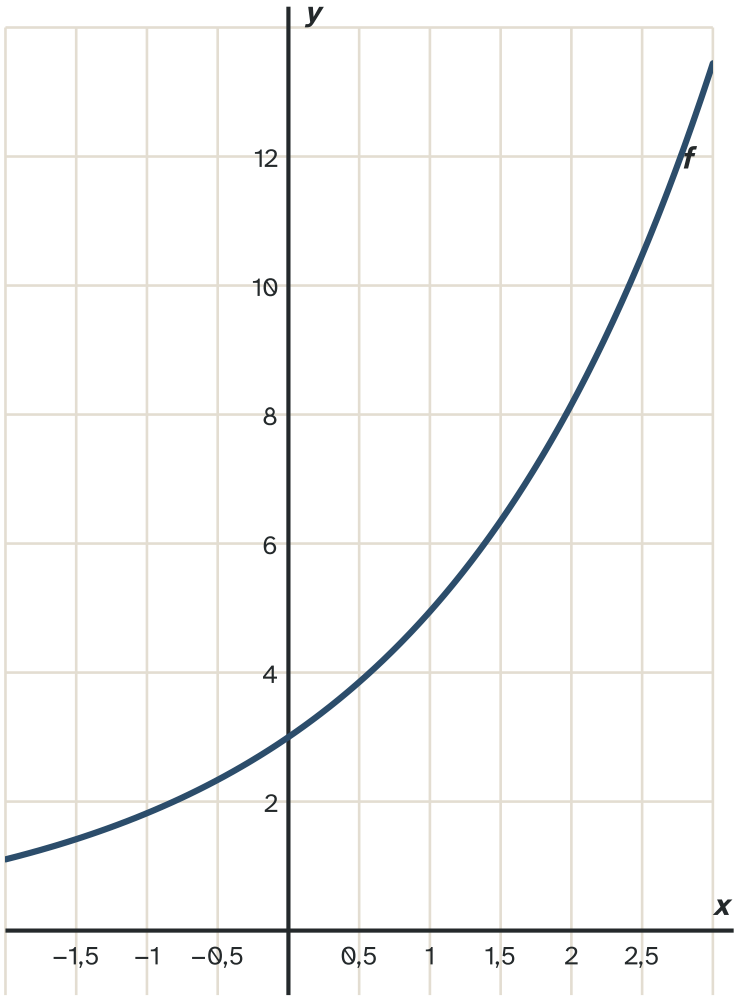
a) $h(12) \approx$ _____ (eine Nachkommastelle)

b) $g(12) =$ _____

c) Zwischen $t = 12$ und $t = 13$ liegt der Zeitpunkt, an dem h die Gerade g _____.

13 Lies am Graphen ab.

a)



Anfangswert f(0) =

☐ , der Graph ☐ (steigt oder fällt)

14 Begründe.

a) Warum kann ein exponentielles Wachstumsmodell in der Wirklichkeit nicht beliebig lange gelten?

Antwort:

Kannst du das schon?

Kreuze an, wie sicher du dich fühlst. Hier gibt es kein Richtig oder Falsch.

Ich kann …	sicher	fast	noch nicht
Ich beschreibe Eigenschaften von a^x und e^x.	☐	☐	☐
Ich leite e^x und e^(mx+n) ab.	☐	☐	☐
Ich deute a, k und S in Wachstumsmodellen.	☐	☐	☐
Ich beurteile ein Modell anhand von Messwerten.	☐	☐	☐

Tipp: Bei „noch nicht“ schau dir „Kurz erklärt“ vorne im Heft noch einmal an oder scanne den Code auf dem Deckblatt. Dann probierst du die Aufgaben noch einmal.

Lösungen

Erst selbst rechnen, dann vergleichen. Bei den Rechenaufgaben steht der Rechenweg dabei.

●○○ Basis: a^x, die Zahl e und das Ableiten

1 Berechne den Funktionswert. Brüche als Dezimalzahl.

a) **$f(x) = 2^x$. $f(5) = 32$**

→ $2^5 = 32$.

b) **$f(x) = 10^x$. $f(-3) = 0{,}001$**

→ $10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$.

c) **$f(x) = 0{,}5^x$. $f(3) = 0{,}125$**

→ $0{,}5^3 = 0{,}125$.

d) **$f(x) = 4^x$. $f(0) = 1$**

→ $a^0 = 1$.

e) **$f(x) = 2^x$. $f(-3) = 0{,}125$**

→ $2^{-3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$.

2 Kreuze an.

a) **fällt**

→ Basis zwischen 0 und 1: Zerfall.

b) **oberhalb**

→ a^x ist immer positiv.

c) **(0 | 1)**

→ $a^0 = 1$.

d) **$y > 0$**

→ Es gibt keine negativen Werte und keine 0.

3 Berechne mit dem Taschenrechner auf zwei Nachkommastellen.

a) **$e^2 \approx 7{,}39$**

→ $e^2 = 7{,}389 \ldots$

b) **$e^{-1} \approx 0{,}37$**

→ $1/e = 0{,}3679 \ldots$

c) **e^(0,5) ≈ 1,65**

→ $\sqrt{e} = 1{,}6487 \ldots$

4 Leite ab und berechne f′(0).

a) **$f(x) = 4e^x$. $f'(0) = 4$**

→ $f'(x) = 4e^x$.

b) **$f(x) = e^x + x^2$. $f'(0) = 1$**

→ $f'(x) = e^x + 2x$. $f'(0) = 1 + 0$.

c) **$f(x) = 3e^x - 6x$. $f'(0) = -3$**

→ $f'(x) = 3e^x - 6$. $f'(0) = 3 - 6 = -3$.

d) **$f(x) = e^x - x$ hat einen Tiefpunkt bei $x = 0$**

→ $f'(x) = e^x - 1 = 0$ ergibt $x = 0$.

●●○ Standard: Kettenregel, Wachstum und begrenztes Wachstum

5 Leite ab und berechne den Wert.

a) **f(x) = e^(2x). f′(0) = 2**

→ f′(x) = 2e^(2x).

b) **f(x) = e^(−3x). f′(0) = -3**

→ f′(x) = −3e^(−3x).

c) **f(x) = 5e^(0,2x). f′(0) = 1**

→ f′(x) = 5 · 0,2 · e^(0,2x) = e^(0,2x).

d) **f(x) = e^(4x−2). f′(0,5) = 4**

→ f′(x) = 4e^(4x−2). Bei x = 0,5 ist der Exponent 0.

6 Modell: N(t) = 200·e^(0,05t). Berechne.

a) **N(0) = 200**

→ $e^0 = 1$.

b) **N′(0) = 10**

→ N′(t) = 0,05 · 200 · e^(0,05t). N′(0) = 10.

7 Verdopplungs- und Halbwertszeit. Nutze ln 2 ≈ 0,693.

a) **k = 0,0693. Die Verdopplungszeit ist 10**

→ 0,693 / 0,0693 = 10.

b) **k = −0,0231. Die Halbwertszeit ist 30**

→ 0,693 / 0,0231 = 30.

c) **Aus 100 werden nach drei Verdopplungszeiten 800**

→ $100 \cdot 2^3 = 800$.

8 Begrenztes Wachstum: f(t) = 100 − 60·e^(−0,1t).

a) **f(0) = 40**

→ 100 − 60 = 40.

b) **Die Schranke ist S = 100**

→ Für t → ∞ geht der e-Term gegen 0.

c) **f′(0) = 6**

→ f′(t) = 60 · 0,1 · e^(−0,1t). f′(0) = 6.

9 Beschreibe in Worten.

a) **Um 4 mg pro Stunde**

→ m′(t) = −0,05 · 80 · e^(−0,05t) = −4·e^(−0,05t).

→ m′(0) = −4: Die Menge nimmt anfangs um 4 mg pro Stunde ab.

b) **2,2; klein, das Modell passt hier gut**

→ 168,2 − 166 = 2,2.

→ Bezogen auf 166 sind das etwa 1,3 %. Das ist eine kleine Abweichung.

10 Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe die richtige Fassung auf.

a) **Stimmt nicht. Richtig: Die Ableitung ist 3·e^(3x).**

b) **Stimmt.**

c) **Stimmt nicht. Richtig: Die Änderungsrate ist am Anfang am größten und sinkt dann.**

●●● Plus: Wachstumsmodelle vergleichen (vor allem für den Leistungskurs)

11 Welches Modell? Kreuze an.

a) linear

→ Konstante Änderungsrate.

b) exponentiell

→ f′ ist proportional zu f.

c) begrenzt

→ f′ ist proportional zum Abstand zu S = 50.

12 Vergleich: h(t) = 100·e^(0,1t) und g(t) = 100 + 20t.

a) h(12) ≈ 332,0 (eine Nachkommastelle)

→ 100 · e^(1,2) = 332,01 …

b) g(12) = 340

→ 100 + 240.

c) Zwischen t = 12 und t = 13 liegt der Zeitpunkt, an dem h die Gerade g überholt.

→ Bei t = 13 gilt h ≈ 366,9 > 360 = g.

13 Lies am Graphen ab.

a) f(0) = 3, steigt

14 Begründe.

a) Weil Ressourcen wie Platz oder Nahrung begrenzt sind. Dann ist ein begrenztes Modell passender.

→ Das exponentielle Modell wächst unbegrenzt.

→ Reale Bestände stoßen an Grenzen.

→ Ein begrenztes Modell hat eine Schranke S.