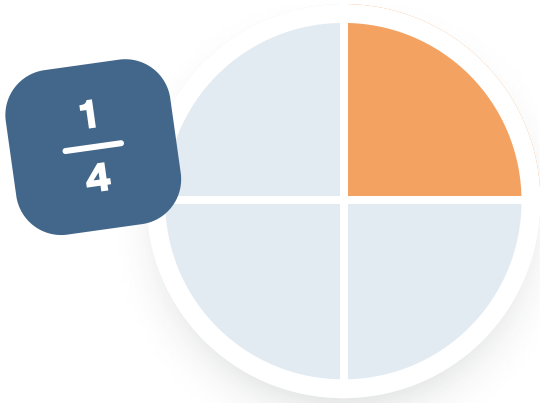
DYS+ Campus



Übungsheft · Mathe · Klasse 13

Die Binomialverteilung

Erklärungen, 32 Aufgaben in drei Stufen und alle Lösungen mit Rechenweg.

Name _____ **Datum** _____

Das lernst du

- Ich erkenne Bernoulli-Ketten und berechne Pfadwahrscheinlichkeiten.
- Ich berechne P(X = k), kumulierte Wahrscheinlichkeiten, μ und σ.
- Ich löse Sachaufgaben und schätze p aus Stichproben.

So arbeitest du mit dem Heft

●○○ **Basis** zum Einstieg

●●○ **Standard** zum Üben

●●● **Plus** zum Weiterdenken

Du musst nicht alles machen. Fang bei Basis an. Die Lösungen stehen hinten im Heft.

Noch unsicher?

Scanne den Code. Dort wird das Thema Schritt für Schritt erklärt.

dysplus.de/lernen/gymnasium/klasse-13/mathe/binomialverteilung/bernoulli-experimente-und-ketten

Kurz erklärt

Merksatz: Bernoulli-Kette: n unabhängige Versuche mit gleichem p. $P(X = k) = (n \text{ über } k) \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$. $\mu = n \cdot p$, $\sigma = \sqrt{(n \cdot p \cdot (1 - p))}$.

Pfadanzahlen (n über k)

n	k = 0	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4
4	1	4	6	4	1
5	1	5	10	10	5
6	1	6	15	20	15

P(X = 3) bei n = 5 und p = 0,7

1. Pfade: (5 über 3) = 10.
2. Treffer: $0{,}7^3 = 0{,}343$. Nieten: $0{,}3^2 = 0{,}09$.
3. $10 \cdot 0{,}343 \cdot 0{,}09 = 0{,}3087 \approx 0{,}309$.

Typischer Fehler: „Mindestens“ rechnest du mit dem Gegenereignis: $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$. Und ohne Zurücklegen aus einer kleinen Urne ist es keine Bernoulli-Kette.

●○○ Basis

Ketten, Pfade und Binomialkoeffizienten

1 Kreuze an: Ist es eine Bernoulli-Kette?

a) Ein Würfel wird 12-mal geworfen, ein Treffer ist eine Sechs. Das _____ eine Bernoulli-Kette. ☐ **ist** ☐ **ist keine**

b) Aus einer Urne mit 6 Kugeln werden 3 ohne Zurücklegen gezogen. Das _____ eine Bernoulli-Kette. ☐ **ist keine** ☐ **ist**

c) Eine Münze wird 20-mal geworfen, Treffer ist Zahl. Das _____ eine Bernoulli-Kette. ☐ **ist keine** ☐ **ist**

d) Man misst 15 Körpergrößen. Das _____ eine Bernoulli-Kette. ☐ **ist** ☐ **ist keine**

2 Berechne die Pfadwahrscheinlichkeit.

a) p = 0,2: Pfad TTN bei n = 3: _____

b) p = 0,5: ein beliebiger Pfad bei n = 5: _____

c) p = 0,1: Pfad NNT bei n = 3: _____

3 **Berechne den Binomialkoeffizienten ohne Hilfsmittel.**

a) (5 über 1) = _____

b) (5 über 2) = _____

c) (6 über 2) = _____

d) (6 über 4) = _____

e) (8 über 0) = _____

f) (7 über 3) = _____

●●○ Standard

Formel, kumulierte Werte, Kenngrößen

4 **Berechne P(X = k) mit der Formel von Bernoulli.**

a) n = 3, p = 0,5, k = 1: _____

b) n = 4, p = 0,5, k = 2: _____

c) n = 5, p = 0,2, k = 1: _____

d) n = 4, p = 0,1, k = 0: _____

5 **n = 10 und p = 0,5. Es gibt 1024 Pfade; die Pfadanzahlen für k = 0 bis 10 sind 1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1. Runde auf drei Nachkommastellen.**

a) $P(X \leq 1) \approx$ _____

b) $P(X \geq 9) \approx$ _____

c) $P(X = 5) \approx$ _____

6 **Berechne die Kenngrößen. Runde σ auf zwei Nachkommastellen.**

a) n = 100, p = 0,5: μ = _____ und σ = _____

b) n = 400, p = 0,25: μ = _____ und σ = _____

c) n = 225, p = 0,2: μ = _____ und σ = _____

7 Rechne und schreibe einen Antwortsatz.

a) Wie oft muss man einen Würfel mindestens werfen, damit mit mindestens 99 % Wahrscheinlichkeit wenigstens eine Sechs fällt?

Antwort:

b) Eine Fertigung (Modell) hat eine Fehlerquote von 10 %. Wie viele Teile muss man mindestens prüfen, damit mit mindestens 95 % Wahrscheinlichkeit ein defektes dabei ist?

Antwort:

8 Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe die richtige Fassung auf.

a) $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 3)$. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

b) Bei $p = 0{,}5$ ist das Histogramm der Binomialverteilung symmetrisch. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

c) Wenn n vervierfacht wird, verdoppelt sich σ (bei gleichem p). ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

●●● Plus

Überbuchung und Schätzen

9 Rechne mit Software und deute. Alle Werte sind ausgedacht (Modell).

a) Eine Gesellschaft verkauft 62 Tickets für 60 Plätze. Jeder Gast erscheint unabhängig mit p = 0,9. Wie wahrscheinlich ist eine Überbuchung (X ≥ 61)?

Antwort:

b) In einer Stichprobe von 200 Teilen sind 34 defekt. Wie groß ist die relative Häufigkeit, und wie groß ist die Streuung σ(h), wenn p = 0,2 wäre?

Antwort:

10 Binomialverteilung: n = 10. Es gilt P(X = 2) ≈ 0,302 für p = 0,2.

a) Für p = 0,8 gilt P(X = _____) ≈ 0,302.

b) Für p = 0,2 liegt die größte Säule bei k = _____ (μ = n · p).

Kannst du das schon?

Kreuze an, wie sicher du dich fühlst. Hier gibt es kein Richtig oder Falsch.

Ich kann …	sicher	fast	noch nicht
Ich erkenne Bernoulli-Ketten und berechne Pfadwahrscheinlichkeiten.	☐	☐	☐
Ich berechne P(X = k), kumulierte Wahrscheinlichkeiten, μ und σ.	☐	☐	☐
Ich löse Sachaufgaben und schätze p aus Stichproben.	☐	☐	☐

Tipp: Bei „noch nicht“ schau dir „Kurz erklärt“ vorne im Heft noch einmal an oder scanne den Code auf dem Deckblatt. Dann probierst du die Aufgaben noch einmal.

Lösungen

Erst selbst rechnen, dann vergleichen. Bei den Rechenaufgaben steht der Rechenweg dabei.

●○○ Basis: Ketten, Pfade und Binomialkoeffizienten

1 Kreuze an: Ist es eine Bernoulli-Kette?

a) ist

→ Zwei Ausgänge, $p = \frac{1}{6}$, unabhängig.

b) ist keine

→ p ändert sich von Zug zu Zug.

c) ist

→ p = 0,5, unabhängig.

d) ist keine

→ Es gibt keine zwei Ausgänge Treffer/Niete.

2 Berechne die Pfadwahrscheinlichkeit.

a) p = 0,2: Pfad TTN bei n = 3: 0,032

→ 0,2 · 0,2 · 0,8 = 0,032.

b) p = 0,5: ein beliebiger Pfad bei n = 5: 0,03125

→ $0{,}5^5 = 0{,}03125$.

c) p = 0,1: Pfad NNT bei n = 3: 0,081

→ 0,9 · 0,9 · 0,1 = 0,081.

3 Berechne den Binomialkoeffizienten ohne Hilfsmittel.

a) (5 über 1) = 5

→ Der Treffer kann an 5 Stellen stehen.

b) (5 über 2) = 10

→ 5 · 4/(2 · 1) = 10.

c) (6 über 2) = 15

→ 6 · 5/(2 · 1) = 15.

d) (6 über 4) = 15

→ Symmetrie: (6 über 4) = (6 über 2).

e) (8 über 0) = 1

→ Nur der Pfad ohne Treffer.

f) (7 über 3) = 35

→ $7 \cdot 6 \cdot 5/(3 \cdot 2 \cdot 1) = \frac{210}{6} = 35$.

●●○ Standard: Formel, kumulierte Werte, Kenngrößen

4 Berechne P(X = k) mit der Formel von Bernoulli.

a) n = 3, p = 0,5, k = 1: 0,375

→ 3 · 0,5 · 0,25 = 0,375.

b) n = 4, p = 0,5, k = 2: 0,375

→ 6 · 0,0625 = 0,375.

c) n = 5, p = 0,2, k = 1: 0,4096

→ $5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^4 = 5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}4096 = 0{,}4096$.

d) n = 4, p = 0,1, k = 0: 0,6561

→ $0{,}9^4 = 0{,}6561$.

5 **n = 10 und p = 0,5. Es gibt 1024 Pfade; die Pfadanzahlen für k = 0 bis 10 sind 1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1. Runde auf drei Nachkommastellen.**

a) **P(X ≤ 1) ≈ 0,011**

→ (1 + 10)/1024 = $\frac{11}{1024}$ ≈ 0,011.

b) **P(X ≥ 9) ≈ 0,011**

→ (10 + 1)/1024 ≈ 0,011.

c) **P(X = 5) ≈ 0,246**

→ $\frac{252}{1024}$ ≈ 0,246.

6 **Berechne die Kenngrößen. Runde σ auf zwei Nachkommastellen.**

a) **n = 100, p = 0,5: μ = 50 und σ = 5**

→ σ = √25 = 5.

b) **n = 400, p = 0,25: μ = 100 und σ = 8,66**

→ σ = √75 ≈ 8,66.

c) **n = 225, p = 0,2: μ = 45 und σ = 6**

→ σ = √36 = 6.

7 **Rechne und schreibe einen Antwortsatz.**

a) **mindestens 26 Würfe**

→ Ansatz: $1 - (\frac{5}{6})^n \geq 0{,}99$, also $(\frac{5}{6})^n \leq 0{,}01$.

→ $n \geq \ln(0{,}01)/\ln(\frac{5}{6}) \approx 25{,}26$.

→ Probe: n = 25 gibt 0,9895, n = 26 gibt 0,9913. Also n = 26.

b) **mindestens 29 Teile**

→ Ansatz: $1 - 0{,}9^n \geq 0{,}95$.

→ n = 28: 0,9477 (zu klein). n = 29: 0,9529.

→ Also mindestens 29 Teile.

8 **Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe die richtige Fassung auf.**

a) **Stimmt nicht. Richtig: Richtig ist P(X ≥ 3) = 1 – P(X ≤ 2).**

b) **Stimmt.**

c) **Stimmt.**

●●● Plus: Überbuchung und Schätzen

9 **Rechne mit Software und deute. Alle Werte sind ausgedacht (Modell).**

a) **≈ 0,011**

→ X ist binomialverteilt mit n = 62 und p = 0,9.

→ Software: P(X ≤ 60) ≈ 0,989.

→ P(X ≥ 61) = 1 – 0,989 = 0,011. Antwort: etwa 1,1 %.

b) **h = 0,17; σ(h) ≈ 0,028**

→ h = $\frac{34}{200}$ = 0,17.

→ σ(h) = √(0,2 · 0,8/200) = √0,0008 ≈ 0,028.

10 **Binomialverteilung: n = 10. Es gilt P(X = 2) ≈ 0,302 für p = 0,2.**

a) **Für p = 0,8 gilt P(X = 8) ≈ 0,302.**

→ Spiegelung: k wird zu n – k = 8.

b) **Für p = 0,2 liegt die größte Säule bei k = 2 (μ = n · p).**

→ μ = 10 · 0,2 = 2.