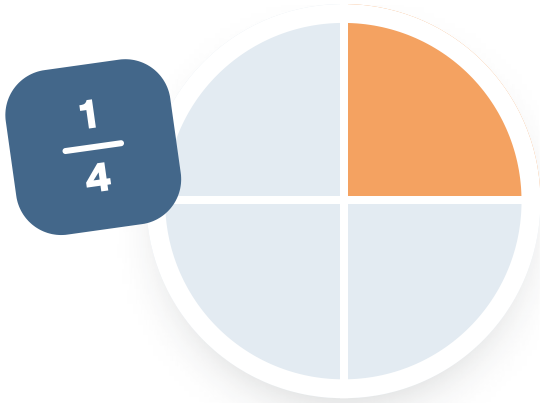
DYS+ Campus



Übungsheft · Mathe · Klasse 12

Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

Erklärungen, 37 Aufgaben in drei Stufen und alle Lösungen mit Rechenweg.

Name _____ **Datum** _____

Das lernst du

- Ich berechne Wahrscheinlichkeiten für Urnenmodelle und verknüpfte Ereignisse.
- Ich bestimme bedingte Wahrscheinlichkeiten an Baum und Vierfeldertafel.
- Ich kehre Bäume um und prüfe stochastische Unabhängigkeit.
- Ich beurteile Tests mit Basisrate und Fehlalarmen.

So arbeitest du mit dem Heft

●○○ **Basis** zum Einstieg

●●○ **Standard** zum Üben

●●● **Plus** zum Weiterdenken

Du musst nicht alles machen. Fang bei Basis an. Die Lösungen stehen hinten im Heft.

Noch unsicher?

Scanne den Code. Dort wird das Thema Schritt für Schritt erklärt.

dysplus.de/lernen/gymnasium/klasse-12/mathe/bedingte-wahrscheinlichkeit/urnenmodelle-mit-und-ohne-zuruecklegen

Kurz erklärt

Merksatz: $P_A(B) = P(A \cap B) : P(A)$. Die Bedingung A steht unten am P und ist der Nenner. Multiplikationssatz: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$.

Ereignisse verknüpfen

Schreibweise	Bedeutung
$\bar{A}$	Gegenereignis von A
$A \cap B$	A und B
$A \cup B$	A oder B (oder beides)
$A \setminus B$	A, aber nicht B

Baum umkehren

1. Pfade zu B addieren: $P(B) = P(A) \cdot P_A(B) + P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B)$.
2. $P_B(A) = P(A) \cdot P_A(B) : P(B)$.

Merksatz: A und B sind stochastisch unabhängig genau dann, wenn $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ gilt.

Typischer Fehler: $P_A(B)$ und $P_B(A)$ sind verschieden. Unvereinbar ist nicht dasselbe wie unabhängig.

●○○ Basis

Urnen, Ereignisse und Pfade

1 Berechne die Wahrscheinlichkeit in Prozent.

a) Urne mit 2 roten und 3 nicht roten Kugeln, zweimal ziehen mit Zurücklegen: P(zwei rote Kugeln) = _____ %

b) Urne mit 3 roten und 3 nicht roten Kugeln, zweimal ziehen ohne Zurücklegen: P(zwei rote Kugeln) = _____ %

c) Urne mit 3 roten und 2 nicht roten Kugeln, zweimal ziehen ohne Zurücklegen: P(zwei rote Kugeln) = _____ %

d) Urne mit 4 roten und 1 nicht roten Kugel, zweimal ziehen mit Zurücklegen: P(zwei rote Kugeln) = _____ %

e) Urne mit 3 roten und 1 nicht roten Kugel, zweimal ziehen ohne Zurücklegen: P(zwei rote Kugeln) = _____ %

2 Wähle das passende Urnenmodell.

a) Zwei Personen werden aus einer Gruppe von 15 ausgelost: Ziehen _____ Zurücklegen. ☐ **ohne** ☐ **mit**

b) Ein Würfel wird viermal geworfen: Ziehen _____ Zurücklegen. ☐ **mit** ☐ **ohne**

c) Aus einer Schachtel mit 10 Schrauben werden drei auf einmal genommen: Ziehen _____ Zurücklegen. ☐ **ohne** ☐ **mit**

d) Eine Münze wird fünfmal geworfen: Ziehen _____ Zurücklegen. ☐ **mit** ☐ **ohne**

3 **Ein Glücksrad hat die Zahlen 1 bis 20 mit gleich großen Sektoren. Berechne.**

a) A: „gerade“, B: „durch 5 teilbar“. A ∩ B hat _____ Elemente, A ∪ B hat _____ Elemente.

b) A: „Primzahl“, B: „kleiner als 10“. A ∩ B hat _____ Elemente, P(A \ B) = _____ %.

4 **Im Baum gilt: Maschine K liefert 30 %, Maschine L 70 %. Ausschuss: 10 % bei K, 5 % bei L (fiktive Werte). Berechne in Prozent.**

a) P(K und Ausschuss) = _____ %

b) P(L und Ausschuss) = _____ %

c) P(Ausschuss) = _____ %

●●○ Standard

Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

5 **Von n Personen haben a das Merkmal A, davon haben b auch das Merkmal B. Berechne P_A(B) in Prozent.**

a) n = 200, a = 120, b = 54: P_A(B) = _____ %

b) n = 150, a = 60, b = 24: P_A(B) = _____ %

c) n = 300, a = 200, b = 150: P_A(B) = _____ %

d) n = 80, a = 40, b = 10: P_A(B) = _____ %

6 **Wähle die richtige Randsumme als Nenner.**

a) P_V(I) hat im Nenner die Zahl der Personen mit _____. ☐ V ☐ I

b) P_I(V) hat im Nenner die Zahl der Personen mit _____. ☐ I ☐ V

c) P_B̄(A) hat im Nenner die Zahl der Personen mit _____. ☐ B̄ ☐ B

7 **Kehre den Baum um und berechne in Prozent. Schreibe einen Antwortsatz.**

a) 40 % der Kinder fahren mit dem Rad (R). Mit Rad kommen 10 % zu spät (V), ohne Rad 20 %. Wie viel Prozent der Kinder, die zu spät kommen, sind mit dem Rad gefahren?

Antwort:

b) 30 % der Mails sind Werbung (W). Ein Filter markiert 90 % der Werbung und 10 % der übrigen Mails (fiktive Werte). Wie viel Prozent der markierten Mails sind Werbung? Runde auf eine Nachkommastelle.

Antwort:

c) 20 % der Teile sind fehlerhaft (F). Ein Prüfer erkennt 80 % der fehlerhaften Teile und meldet 10 % der fehlerfreien Teile fälschlich (fiktive Werte). Wie viel Prozent der gemeldeten Teile sind wirklich fehlerhaft? Runde auf eine Nachkommastelle.

Antwort:

8 **Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe die richtige Fassung auf.**

a) Es gilt immer P_A(B) = P_B(A). ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

---

b) Der Multiplikationssatz lautet P(A ∩ B) = P(A) · P_A(B). ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

---

c) Zwei unvereinbare Ereignisse mit positiver Wahrscheinlichkeit sind stochastisch unabhängig. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

---

d) A und B sind unabhängig, wenn P(A ∩ B) = P(A) · P(B) gilt. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

---

9 **Prüfe die Unabhängigkeit. Rechne P(A) · P(B) und vergleiche mit P(A ∩ B).**

a) P(A) = 0,5, P(B) = 0,4, P(A ∩ B) = 0,2: A und B sind _____. ☐ **abhängig** ☐ **unabhängig**

b) P(A) = 0,6, P(B) = 0,5, P(A ∩ B) = 0,2: A und B sind _____. ☐ **abhängig** ☐ **unabhängig**

●●● Plus

Tests und Entscheidungen beurteilen

10 **Rechne mit 10 000 Fällen (alle Zahlen sind ausgedacht).**

a) Ein Test erkennt 90 % der Fälle mit einem Merkmal. 5 % der Fälle ohne Merkmal lösen Fehlalarm aus. Das Merkmal liegt bei 2 % der Fälle vor. Wie viele Alarme gibt es, und wie viel Prozent der Alarme sind echt?

Antwort:

b) Gleicher Test, das Merkmal liegt bei 20 % der Fälle vor. Wie viel Prozent der Alarme sind echt?

Antwort:

c) Gleicher Test, das Merkmal liegt bei 1 % der Fälle vor. Wie viel Prozent der Alarme sind echt?

Antwort:

11 Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe die richtige Fassung auf.

a) Wenn ein Test 90 % der Fälle mit Merkmal erkennt, sind 90 % der Alarme echt.

☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

b) Je seltener ein Merkmal ist, desto größer ist der Anteil der Fehlalarme unter den Alarmen.

☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

12 Begründe in ganzen Sätzen.

a) Warum sind bei seltenen Merkmalen viele Alarme Fehlalarme, obwohl der Test gut ist?

Antwort:

b) Ein Fehlalarm kostet wenig, ein übersehener Fall ist gefährlich. Worauf sollte man bei der Wahl des Tests besonders achten? Begründe.

Antwort:

Kannst du das schon?

Kreuze an, wie sicher du dich fühlst. Hier gibt es kein Richtig oder Falsch.

Ich kann …	sicher	fast	noch nicht
Ich berechne Wahrscheinlichkeiten für Urnenmodelle und verknüpfte Ereignisse.	☐	☐	☐
Ich bestimme bedingte Wahrscheinlichkeiten an Baum und Vierfeldertafel.	☐	☐	☐
Ich kehre Bäume um und prüfe stochastische Unabhängigkeit.	☐	☐	☐
Ich beurteile Tests mit Basisrate und Fehlalarmen.	☐	☐	☐

Tipp: Bei „noch nicht“ schau dir „Kurz erklärt“ vorne im Heft noch einmal an oder scanne den Code auf dem Deckblatt. Dann probierst du die Aufgaben noch einmal.

Lösungen

Erst selbst rechnen, dann vergleichen. Bei den Rechenaufgaben steht der Rechenweg dabei.

●○○ Basis: Urnen, Ereignisse und Pfade

1 **Berechne die Wahrscheinlichkeit in Prozent.**

a) **Urne mit 2 roten und 3 nicht roten Kugeln, zweimal ziehen mit Zurücklegen: P(zwei rote Kugeln) = 16 %**

b) **Urne mit 3 roten und 3 nicht roten Kugeln, zweimal ziehen ohne Zurücklegen: P(zwei rote Kugeln) = 20 %**

c) **Urne mit 3 roten und 2 nicht roten Kugeln, zweimal ziehen ohne Zurücklegen: P(zwei rote Kugeln) = 30 %**

d) **Urne mit 4 roten und 1 nicht roten Kugel, zweimal ziehen mit Zurücklegen: P(zwei rote Kugeln) = 64 %**

e) **Urne mit 3 roten und 1 nicht roten Kugel, zweimal ziehen ohne Zurücklegen: P(zwei rote Kugeln) = 50 %**

2 **Wähle das passende Urnenmodell.**

a) **ohne**

→ Eine Person kann nicht zweimal ausgelost werden.

b) **mit**

→ Vor jedem Wurf sind wieder alle sechs Zahlen möglich.

c) **ohne**

→ Eine entnommene Schraube kann nicht noch einmal entnommen werden.

d) **mit**

→ Die Münze ist vor jedem Wurf gleich.

3 **Ein Glücksrad hat die Zahlen 1 bis 20 mit gleich großen Sektoren. Berechne.**

a) **A: „gerade“, B: „durch 5 teilbar“. A ∩ B hat 2 Elemente, A ∪ B hat 12 Elemente.**

b) **A: „Primzahl“, B: „kleiner als 10“. A ∩ B hat 4 Elemente, P(A \ B) = 20 %.**

4 **Im Baum gilt: Maschine K liefert 30 %, Maschine L 70 %. Ausschuss: 10 % bei K, 5 % bei L (fiktive Werte). Berechne in Prozent.**

a) **P(K und Ausschuss) = 3 %**

b) **P(L und Ausschuss) = 3,5 %**

c) **P(Ausschuss) = 6,5 %**

●●○ Standard: Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

5 **Von n Personen haben a das Merkmal A, davon haben b auch das Merkmal B. Berechne P_A(B) in Prozent.**

a) **n = 200, a = 120, b = 54: P_A(B) = 45 %**

b) **n = 150, a = 60, b = 24: P_A(B) = 40 %**

c) **n = 300, a = 200, b = 150: P_A(B) = 75 %**

d) **n = 80, a = 40, b = 10: P_A(B) = 25 %**

6 **Wähle die richtige Randsumme als Nenner.**

a) **V**

→ Die Bedingung steht unten am P. Sie bestimmt den Nenner.

b) **I**

→ Die Bedingung ist I.

c) **$\bar{B}$**

→ Die Bedingung ist $\bar{B}$.

7 **Kehre den Baum um und berechne in Prozent. Schreibe einen Antwortsatz.**

a) **25 %. Unter den Kindern, die zu spät kommen, sind 25 % mit dem Rad gefahren.**

→ $P(R \cap V) = 0{,}4 \cdot 0{,}1 = 0{,}04$.

→ $P(V) = 0{,}04 + 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}16$.

→ $P_V(R) = 0{,}04 : 0{,}16 = 0{,}25$.

b) **Etwa 79,4 %. Von den markierten Mails sind etwa 79,4 % Werbung.**

→ Markiert und Werbung: $0{,}3 \cdot 0{,}9 = 0{,}27$.

→ Markiert und keine Werbung: $0{,}7 \cdot 0{,}1 = 0{,}07$.

→ P(markiert) = 0,34. Anteil: $0{,}27 : 0{,}34 \approx 0{,}794$.

c) **Etwa 66,7 %. Von den gemeldeten Teilen sind etwa 66,7 % fehlerhaft.**

→ Gemeldet und fehlerhaft: $0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}16$.

→ Gemeldet und fehlerfrei: $0{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}08$.

→ P(gemeldet) = 0,24. Anteil: $0{,}16 : 0{,}24 \approx 0{,}667$.

8 **Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe die richtige Fassung auf.**

a) **Stimmt nicht. Richtig: Die Nenner sind verschieden. Die Werte sind meistens verschieden.**

b) **Stimmt.**

c) **Stimmt nicht. Richtig: Sie sind abhängig: Tritt A ein, ist B unmöglich.**

d) **Stimmt.**

9 **Prüfe die Unabhängigkeit. Rechne P(A) · P(B) und vergleiche mit P(A ∩ B).**

a) **unabhängig**

→ $0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}2$.

b) **abhängig**

→ $0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}3$, aber $P(A \cap B) = 0{,}2$.

●●● Plus: Tests und Entscheidungen beurteilen

10 **Rechne mit 10 000 Fällen (alle Zahlen sind ausgedacht).**

a) **670 Alarme, davon 180 echt: etwa 26,9 %.**

→ Mit Merkmal: 200, davon Alarm: 180.

→ Ohne Merkmal: 9800, davon Alarm: 490.

→ Alarme: 670. 180 : 670 ≈ 0,269.

b) **Etwa 81,8 %.**

→ Mit Merkmal: 2000, davon Alarm: 1800.

→ Ohne Merkmal: 8000, davon Alarm: 400.

→ 1800 : 2200 ≈ 0,818.

c) **Etwa 15,4 %.**

→ Mit Merkmal: 100, davon Alarm: 90.

→ Ohne Merkmal: 9900, davon Alarm: 495.

→ 90 : 585 ≈ 0,154.

11 **Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe die richtige Fassung auf.**

a) **Stimmt nicht. Richtig: Das sind zwei verschiedene Fragen. Der Anteil echter Alarme hängt von der Basisrate ab.**

b) **Stimmt.**

12 **Begründe in ganzen Sätzen.**

a) **Es gibt viel mehr Fälle ohne Merkmal. Auch ein kleiner Anteil davon ergibt viele Fehlalarme, mehr als es echte Fälle gibt.**

→ Gruppe ohne Merkmal ist sehr groß.

→ Kleiner Prozentsatz davon ist trotzdem eine große Zahl.

b) **Auf eine hohe Sensitivität. Fehlalarme kann man mit einer zweiten Prüfung klären, ein übersehener Fall bleibt unentdeckt.**

→ Welche Fehlerart ist schlimmer?

→ Die schlimmere Fehlerart muss selten sein.