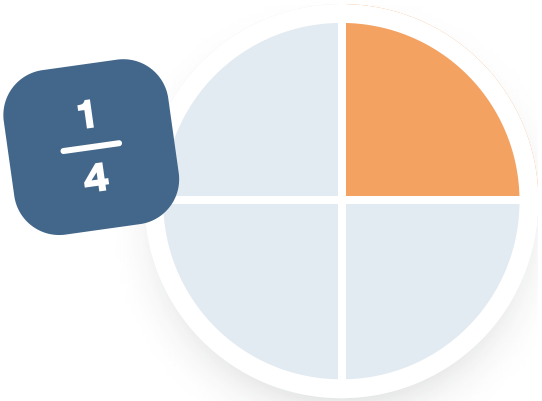
DYS+ Campus



Übungsheft · Mathe · Klasse 11

Änderungsraten und Ableitung an einer Stelle

Erklärungen, 41 Aufgaben in drei Stufen und alle Lösungen mit Rechenweg.

Name _____ **Datum** _____

Das lernst du

- Ich berechne mittlere Änderungsraten und deute sie im Sachkontext.
- Ich erkläre den Übergang von der Sekante zur Tangente.
- Ich bestimme die Ableitung an einer Stelle und stelle Tangente und Normale auf.
- Ich nutze die h-Methode für ganzrationale Funktionen.

So arbeitest du mit dem Heft

●○○ **Basis** zum Einstieg

●●○ **Standard** zum Üben

●●● **Plus** zum Weiterdenken

Du musst nicht alles machen. Fang bei Basis an. Die Lösungen stehen hinten im Heft.

Noch unsicher?

Scanne den Code. Dort wird das Thema Schritt für Schritt erklärt.

dysplus.de/lernen/gymnasium/klasse-11/mathe/aenderungsraten-und-ableitung/mittlere-aenderungsrate

Kurz erklärt

Merksatz: Mittlere Änderungsrate = (f(b) – f(a)) / (b – a) = Steigung der Sekante. Ableitung $f'(x_0) = \lim (h \to 0) (f(x_0 + h) – f(x_0)) / h$ = Steigung der Tangente.

Intervall	[1; 2]	[2; 3]	[1; 3]
Mittlere Änderungsrate von x^2	3	5	4

Mittlere Änderungsrate

1. Gegeben: $f(x) = x^2 – 4x$ auf [1; 4].
2. $f(1) = –3$ und $f(4) = 0$.
3. $(0 – (–3)) / (4 – 1) = 3 / 3 = 1$.

Tangente aufstellen

1. $f(x) = x^2$, Punkt P(3 | 9), $f'(3) = 6$.
2. Ansatz $y = 6x + b$, Punkt einsetzen: $9 = 18 + b$, also $b = –9$.
3. Tangente: $y = 6x – 9$.

Tipp: Schreibe die Einheit mit: Einheit von f durch Einheit von x.

Typischer Fehler: f(2) und f′(2) sind verschieden. f(2) ist die Höhe, f′(2) die Steigung der Tangente. Bei der Normalen gilt –1 / m, nicht –m.

●○○ Basis

Mittlere Änderungsrate und Geschwindigkeit

1 **Berechne die mittlere Änderungsrate von $f(x) = x^2$ auf dem Intervall.**

a) $f(x) = x^2$ auf $[0; 2]$: mittlere Änderungsrate = _____

b) $f(x) = x^2$ auf $[1; 4]$: mittlere Änderungsrate = _____

c) $f(x) = x^2$ auf $[2; 5]$: mittlere Änderungsrate = _____

2 **Die Höhe h eines Wasserstands wird in cm gemessen, die Zeit t in min (Modellwerte). Berechne die mittlere Änderungsrate.**

a) Modell: $h(0) = 10$ cm, $h(4) = 30$ cm. Mittlere Änderungsrate: _____ cm/min

b) Modell: $h(0) = 40$ cm, $h(5) = 15$ cm. Mittlere Änderungsrate: _____ cm/min

c) Modell: $h(0) = 0$ cm, $h(10) = 35$ cm. Mittlere Änderungsrate: _____ cm/min

3 Kreuze an.

a) Die mittlere Änderungsrate ist die Steigung der _____.

☐ **Sekante** ☐ **Normalen** ☐ **Tangente**

b) Der Bruch (f(b) – f(a)) / (b – a) heißt _____.

☐ **Funktionswert** ☐ **Achsenabschnitt** ☐ **Differenzenquotient**

c) Fallen die Funktionswerte, ist die mittlere Änderungsrate _____.

☐ **positiv** ☐ **gleich null** ☐ **negativ**

d) Ein waagerechtes Stück im Weg-Zeit-Graphen bedeutet _____.

☐ **größte Geschwindigkeit** ☐ **Rückwärtsfahren** ☐ **Stillstand**

4 Weg = Geschwindigkeit · Zeit. Berechne den Weg.

a) Ein Fahrzeug fährt 5 s lang mit konstant 8 m/s. Weg: _____ m

b) Ein Fahrzeug fährt 3 s lang mit konstant 25 m/s. Weg: _____ m

●●○ Standard

Sekante, Tangente und Ableitung

5 **Berechne die Sekantensteigung von $f(x) = x^2$ durch die Punkte bei x_0 und $x_0 + h$.**

a) $x_0 = 1$, $h = 0{,}1$: Sekantensteigung = _____

b) $x_0 = 2$, $h = 0{,}5$: Sekantensteigung = _____

c) $x_0 = 3$, $h = 0{,}01$: Sekantensteigung = _____

6 **Gib den Grenzwert an.**

a) $\lim (h \to 0) (4 + h)$ = _____

b) $\lim (h \to 0) (3 + 2h)$ = _____

c) $\lim (h \to 0) (1 + h^2)$ = _____

7 **Kreuze an.**

a) $f'(x_0)$ ist die Steigung der _____ an der Stelle x_0. ☐ **Sekante** ☐ **Tangente** ☐ **Normalen**

b) Ist $f'(x_0)$ negativ, dann _____ der Graph an der Stelle x_0. ☐ **springt** ☐ **steigt** ☐ **fällt**

c) In der Schreibweise $\lim (h \to 0)$ wird h _____. ☐ **gleich 0 gesetzt** ☐ **beliebig klein** ☐ **unendlich groß**

8 **Die Tangente hat die Form $y = m \cdot x + b$. Berechne m und b.**

a) Tangente an $f(x) = x^2$ bei $x_0 = 1$ ($f'(x_0) = 2$): $y =$ _____ $\cdot x +$ _____

b) Tangente an $f(x) = x^2$ bei $x_0 = 3$ ($f'(x_0) = 6$): $y =$ _____ $\cdot x +$ _____

c) Tangente an $f(x) = x^2$ bei $x_0 = -1$ ($f'(x_0) = -2$): $y =$ _____ $\cdot x +$ _____

9 **Berechne die Steigung der Normalen als Dezimalzahl.**

a) Tangentensteigung 2: Normalensteigung = _____

b) Tangentensteigung 0,5: Normalensteigung = _____

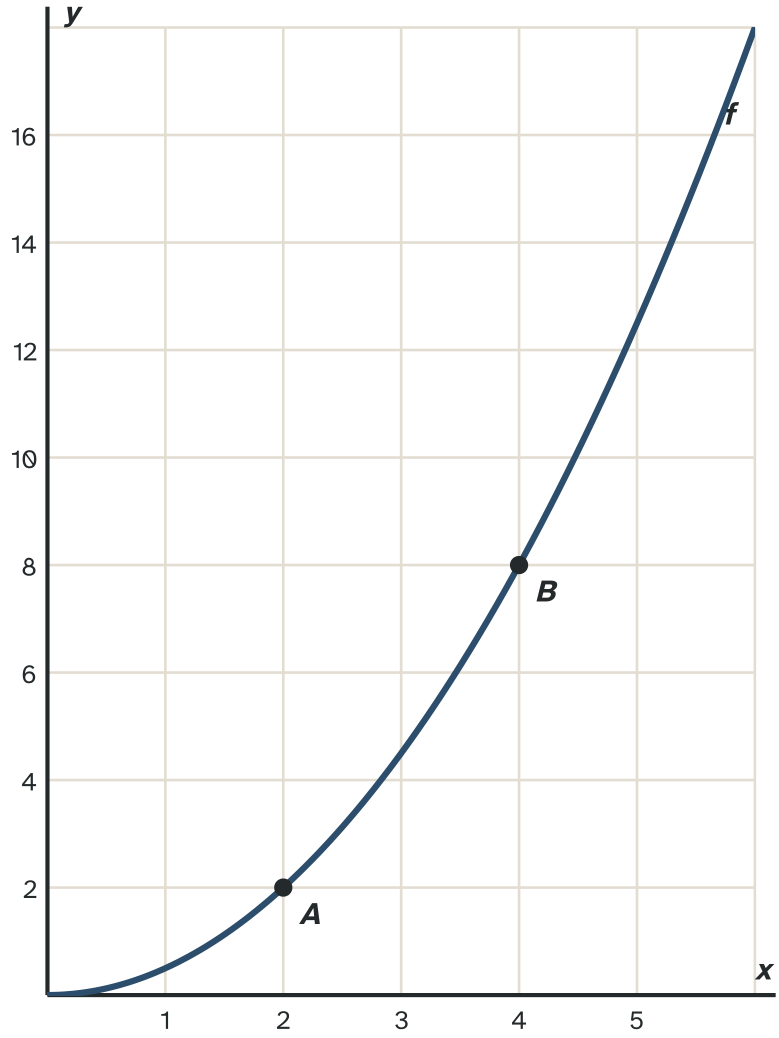
10 **Berechne den Steigungswinkel auf ganze Grad (tan α = m, Taschenrechner im Gradmaß).**

a) $m = 2$: $\alpha =$ _____ °

b) $m = 0{,}5$: $\alpha =$ _____ °

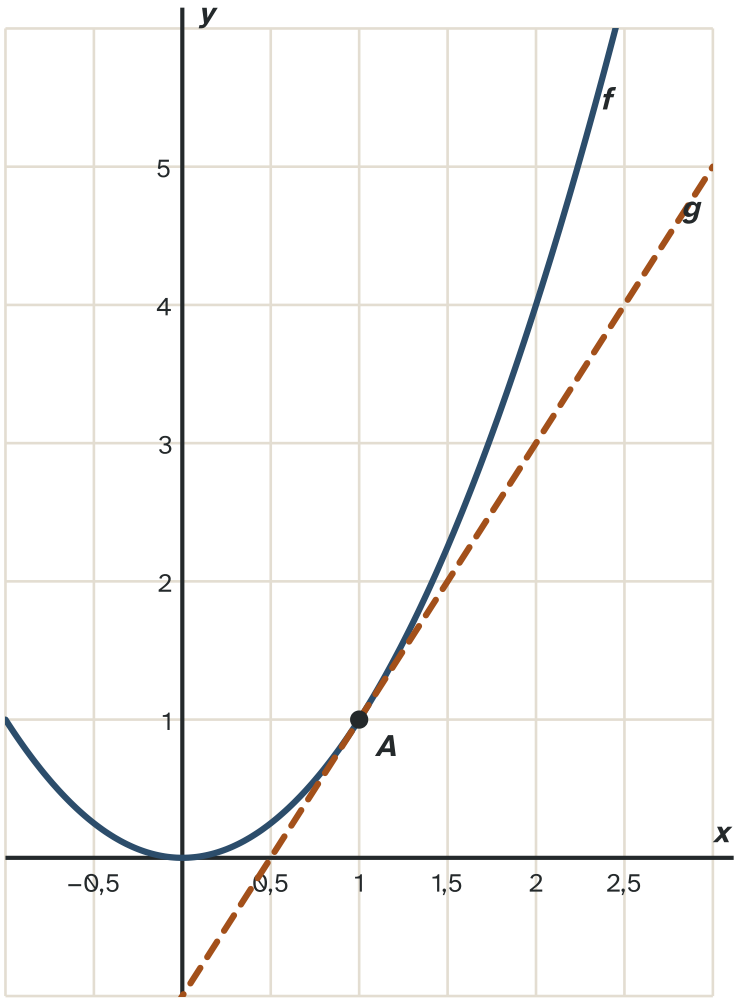
11 **Lies aus dem Bild ab.**

a)



Mittlere Änderungsrate zwischen A(2 | 2) und B(4 | 8):

b)



Die gestrichelte Tangente berührt den Graphen in A(1 | 1). Steigung der Tangente:

Plus

h-Methode, Tangente und Normale

12 **Berechne $f'(x_0)$ mit der h-Methode. Der Differenzenquotient ist nach dem Kürzen angegeben.**

a) $f(x) = 2x^2$, $x_0 = 3$: Quotient $12 + 2h$, also $f'(3) =$ _____

b) $f(x) = x^2 + x$, $x_0 = 2$: Quotient $5 + h$, also $f'(2) =$ _____

c) $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$: Quotient $3 + 3h + h^2$, also $f'(1) =$ _____

13 **Berechne mit der h-Methode. Schreibe jeden Schritt auf.**

a) Bestimme $f'(2)$ für $f(x) = 3x^2 - x$.

Antwort:

b) Bestimme $f'(2)$ für $f(x) = x^3$.

Antwort:

c) Modell: Der Weg ist $s(t) = t^2$ in m (t in s). Bestimme die Momentangeschwindigkeit bei $t = 4$ s.

Antwort:

14 Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe die richtige Fassung auf.

a) Es gilt $(x + h)^2 = x^2 + h^2$. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

b) In den Differenzenquotienten darf man vor dem Kürzen $h = 0$ einsetzen. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

c) Die Normale steht senkrecht auf der Tangente, die Steigungen haben das Produkt -1. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

15 Begründe und rechne.

a) Die Tangente an $f(x) = x^2$ im Punkt $P(2 \mid 4)$ hat die Steigung 4. Gib die Gleichung der Tangente und der Normalen an.

Antwort:

b) Erkläre in zwei Sätzen, warum man im Differenzenquotienten nicht $h = 0$ einsetzen darf und trotzdem eine Tangentensteigung erhält.

Antwort:

Kannst du das schon?

Kreuze an, wie sicher du dich fühlst. Hier gibt es kein Richtig oder Falsch.

Ich kann …	sicher	fast	noch nicht
Ich berechne mittlere Änderungsraten und deute sie im Sachkontext.	☐	☐	☐
Ich erkläre den Übergang von der Sekante zur Tangente.	☐	☐	☐
Ich bestimme die Ableitung an einer Stelle und stelle Tangente und Normale auf.	☐	☐	☐
Ich nutze die h-Methode für ganzrationale Funktionen.	☐	☐	☐

Tipp: Bei „noch nicht“ schau dir „Kurz erklärt“ vorne im Heft noch einmal an oder scanne den Code auf dem Deckblatt. Dann probierst du die Aufgaben noch einmal.

Lösungen

Erst selbst rechnen, dann vergleichen. Bei den Rechenaufgaben steht der Rechenweg dabei.

●○○ Basis: Mittlere Änderungsrate und Geschwindigkeit

1 **Berechne die mittlere Änderungsrate von $f(x) = x^2$ auf dem Intervall.**

a) $f(x) = x^2$ auf $[0; 2]$: mittlere Änderungsrate = **2**

b) $f(x) = x^2$ auf $[1; 4]$: mittlere Änderungsrate = **5**

c) $f(x) = x^2$ auf $[2; 5]$: mittlere Änderungsrate = **7**

2 **Die Höhe h eines Wasserstands wird in cm gemessen, die Zeit t in min (Modellwerte). Berechne die mittlere Änderungsrate.**

a) Modell: $h(0) = 10$ cm, $h(4) = 30$ cm. Mittlere Änderungsrate: **5 cm/min**

b) Modell: $h(0) = 40$ cm, $h(5) = 15$ cm. Mittlere Änderungsrate: **−5 cm/min**

c) Modell: $h(0) = 0$ cm, $h(10) = 35$ cm. Mittlere Änderungsrate: **3,5 cm/min**

3 **Kreuze an.**

a) **Sekante**

→ Sie verbindet zwei Punkte des Graphen.

b) **Differenzenquotient**

→ Er teilt die Änderung der Funktionswerte durch die Änderung der x-Werte.

c) **negativ**

→ Im Zähler steht dann eine negative Änderung.

d) **Stillstand**

→ Der Weg ändert sich nicht, die Steigung ist 0.

4 **Weg = Geschwindigkeit · Zeit. Berechne den Weg.**

a) Ein Fahrzeug fährt 5 s lang mit konstant 8 m/s. Weg: **40 m**

b) Ein Fahrzeug fährt 3 s lang mit konstant 25 m/s. Weg: **75 m**

●●○ Standard: Sekante, Tangente und Ableitung

5 **Berechne die Sekantensteigung von $f(x) = x^2$ durch die Punkte bei x_0 und $x_0 + h$.**

a) $x_0 = 1$, $h = 0{,}1$: Sekantensteigung = **2,1**

b) $x_0 = 2$, $h = 0{,}5$: Sekantensteigung = **4,5**

c) $x_0 = 3$, $h = 0{,}01$: Sekantensteigung = **6,01**

6 **Gib den Grenzwert an.**

a) $\lim_{h \to 0} (4 + h) = 4$

b) $\lim_{h \to 0} (3 + 2h) = 3$

c) $\lim_{h \to 0} (1 + h^2) = 1$

7 **Kreuze an.**

a) **Tangente**

→ Die Ableitung ist der Grenzwert der Sekantensteigungen.

b) **fällt**

→ Negative Steigung heißt fallender Graph.

c) **beliebig klein**

→ h kommt 0 beliebig nahe, ist aber nie genau 0.

8 **Die Tangente hat die Form $y = m \cdot x + b$. Berechne m und b.**

a) **Tangente an $f(x) = x^2$ bei $x_0 = 1$ ($f'(x_0) = 2$): $y = 2 \cdot x + -1$**

b) **Tangente an $f(x) = x^2$ bei $x_0 = 3$ ($f'(x_0) = 6$): $y = 6 \cdot x + -9$**

c) **Tangente an $f(x) = x^2$ bei $x_0 = -1$ ($f'(x_0) = -2$): $y = -2 \cdot x + -1$**

9 **Berechne die Steigung der Normalen als Dezimalzahl.**

a) **Tangentensteigung 2: Normalensteigung = −0,5**

b) **Tangentensteigung 0,5: Normalensteigung = −2**

10 **Berechne den Steigungswinkel auf ganze Grad ($\tan \alpha = m$, Taschenrechner im Gradmaß).**

a) **$m = 2$: $\alpha = 63\,°$**

b) **$m = 0{,}5$: $\alpha = 27\,°$**

11 **Lies aus dem Bild ab.**

a) **3**

b) **2**

●●● Plus: h-Methode, Tangente und Normale

12 **Berechne $f'(x_0)$ mit der h-Methode. Der Differenzenquotient ist nach dem Kürzen angegeben.**

a) **$f(x) = 2x^2$, $x_0 = 3$: Quotient $12 + 2h$, also $f'(3) = 12$**

b) **$f(x) = x^2 + x$, $x_0 = 2$: Quotient $5 + h$, also $f'(2) = 5$**

c) **$f(x) = x^3$, $x_0 = 1$: Quotient $3 + 3h + h^2$, also $f'(1) = 3$**

13 Berechne mit der h-Methode. Schreibe jeden Schritt auf.

a) 11

→ $f(2) = 12 - 2 = 10$.

→ $f(2 + h) = 3(4 + 4h + h^2) - 2 - h = 10 + 11h + 3h^2$.

→ Differenz: $11h + 3h^2$. Quotient: $11 + 3h$.

→ $h \to 0$: $f'(2) = 11$.

b) 12

→ $(2 + h)^3 = 8 + 12h + 6h^2 + h^3$.

→ Differenz: $12h + 6h^2 + h^3$. Quotient: $12 + 6h + h^2$.

→ $h \to 0$: $f'(2) = 12$.

c) 8 m/s

→ $s(4 + h) = 16 + 8h + h^2$.

→ Quotient: $(8h + h^2) / h = 8 + h$.

→ $h \to 0$: Die Momentangeschwindigkeit ist 8 m/s.

14 Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe die richtige Fassung auf.

a) Stimmt nicht. Richtig: Es gilt $(x + h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$.

b) Stimmt nicht. Richtig: Dann steht $0 / 0$. Erst vereinfachen und kürzen, dann h gegen 0 gehen lassen.

c) Stimmt.

15 Begründe und rechne.

a) Tangente: $y = 4x - 4$. Normale: $y = -0{,}25x + 4{,}5$.

→ Tangente: $4 = 4 \cdot 2 + b$, also $b = -4$.

→ Normalensteigung: $-1 / 4 = -0{,}25$.

→ Normale: $4 = -0{,}25 \cdot 2 + b$, also $b = 4{,}5$.

b) Für $h = 0$ steht $0 / 0$ da. Man betrachtet, wohin die Sekantensteigungen laufen, wenn h immer kleiner wird.

→ Nenner würde 0.

→ Grenzwert statt Einsetzen.