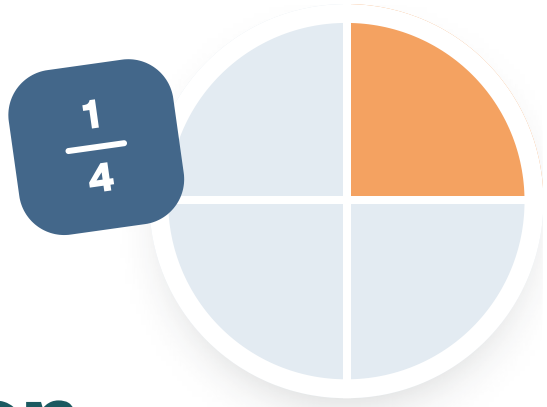
DYS+ Campus



Übungsheft · Mathe · Klasse 11

Ableitungsfunktion und Ableitungsregeln

Erklärungen, 40 Aufgaben in drei Stufen und alle Lösungen mit Rechenweg.

Name _____ **Datum** _____

Das lernst du

- Ich erkläre die Ableitungsfunktion als Funktion der Steigungen.
- Ich leite Potenzfunktionen und Summen mit den Regeln ab.
- Ich lese aus dem Graphen von f Eigenschaften von f′ ab und umgekehrt.
- Ich begründe eine Ableitungsregel.

So arbeitest du mit dem Heft

●○○ **Basis** zum Einstieg

●●○ **Standard** zum Üben

●●● **Plus** zum Weiterdenken

Du musst nicht alles machen. Fang bei Basis an. Die Lösungen stehen hinten im Heft.

Noch unsicher?

Scanne den Code. Dort wird das Thema Schritt für Schritt erklärt.

dysplus.de/lernen/gymnasium/klasse-11/mathe/ableitungsfunktion-und-regeln/die-ableitungsfunktion

Kurz erklärt

Merksatz: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$. $(c \cdot f)' = c \cdot f'$. $(f + g)' = f' + g'$. Konstanten fallen weg.

f(x)	x	x^2	x^3	x^4
f′ (x)	1	2x	$3x^2$	$4x^3$

Gliedweise ableiten

1. $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5x - 7$.
2. $3x^4$ gibt $12x^3$, $-2x^2$ gibt $-4x$, $5x$ gibt 5, -7 gibt 0.
3. $f'(x) = 12x^3 - 4x + 5$.

Waagerechte Tangente

1. $f(x) = x^3 - 3x$, $f'(x) = 3x^2 - 3$.
2. $3x^2 - 3 = 0$ ergibt $x^2 = 1$.
3. $x = -1$ oder $x = 1$.

Tipp: $f' > 0$: f steigt. $f' < 0$: f fällt. $f' = 0$: waagerechte Tangente.

Typischer Fehler: Der Faktor wird oft vergessen: $(3x^4)' = 12x^3$, nicht $4x^3$. Eine Konstante bleibt nicht stehen: $(x^2 + 5)' = 2x$.

●○○ Basis

Ableitungsfunktion und Potenzregel

1 Leite mit der Potenzregel ab und berechne die Steigung.

a) $f(x) = x^3$: $f'(2) =$ _____

b) $f(x) = x^4$: $f'(2) =$ _____

c) $f(x) = x^5$: $f'(2) =$ _____

d) $f(x) = x^3$: $f'(-1) =$ _____

e) $f(x) = x^4$: $f'(-1) =$ _____

2 Für $f(x) = x^2$ ist $f'(x) = 2x$. Berechne $f'(x)$.

a) $f'(-3) =$ _____

b) $f'(0) =$ _____

c) $f'(2) =$ _____

d) $f'(0{,}5) =$ _____

3 Kreuze an.

a) Die Ableitungsfunktion f' gibt für jede Stelle die _____ des Graphen von f an.

☐ **Steigung** ☐ **Länge** ☐ **Höhe**

b) Wo f' positiv ist, _____ der Graph von f.

☐ **steigt** ☐ **fällt** ☐ **springt**

c) Die Ableitung von $f(x) = x$ ist _____.

☐ **0** ☐ **1** ☐ **x**

d) Die Ableitung einer Konstanten ist _____.

☐ **0** ☐ **die Konstante** ☐ **1**

e) Die Potenzregel lautet $(x^n)' =$ _____.

☐ $n \cdot x^n$ ☐ x^{n-1} ☐ $n \cdot x^{n-1}$

●●○ Standard

Regeln anwenden, Graphen lesen

4 Leite gliedweise ab und berechne die Steigung.

a) $f(x) = x^3 - 4x$: $f'(2) =$ _____

b) $f(x) = 2x^3 - x^2$: $f'(1) =$ _____

c) $f(x) = x^4 - 2x^3$: $f'(1) =$ _____

d) $f(x) = 5x^2 - 3x + 7$: $f'(2) =$ _____

5 Löse $f'(x) = 0$. Trage die Stellen ein, bei zwei Stellen zuerst die kleinere.

a) $f(x) = x^2 - 6x$: $f'(x) = 2x - 6$. Stelle: _____

b) $f(x) = x^3 - 3x$: $f'(x) = 3x^2 - 3$. Stellen: _____ und _____

c) $f(x) = x^3 - 12x$: $f'(x) = 3x^2 - 12$. Stellen: _____ und _____

d) $f(x) = x^4 - 4x$: $f'(x) = 4x^3 - 4$. Stelle: _____

6 Wähle die richtige Ableitung.

a) $f(x) = 4x^3 - x + 7$: $f'(x) =$ _____ ☐ $12x^2 - 1 + 7$ ☐ $12x^2 - 1$ ☐ $4x^2 - 1$

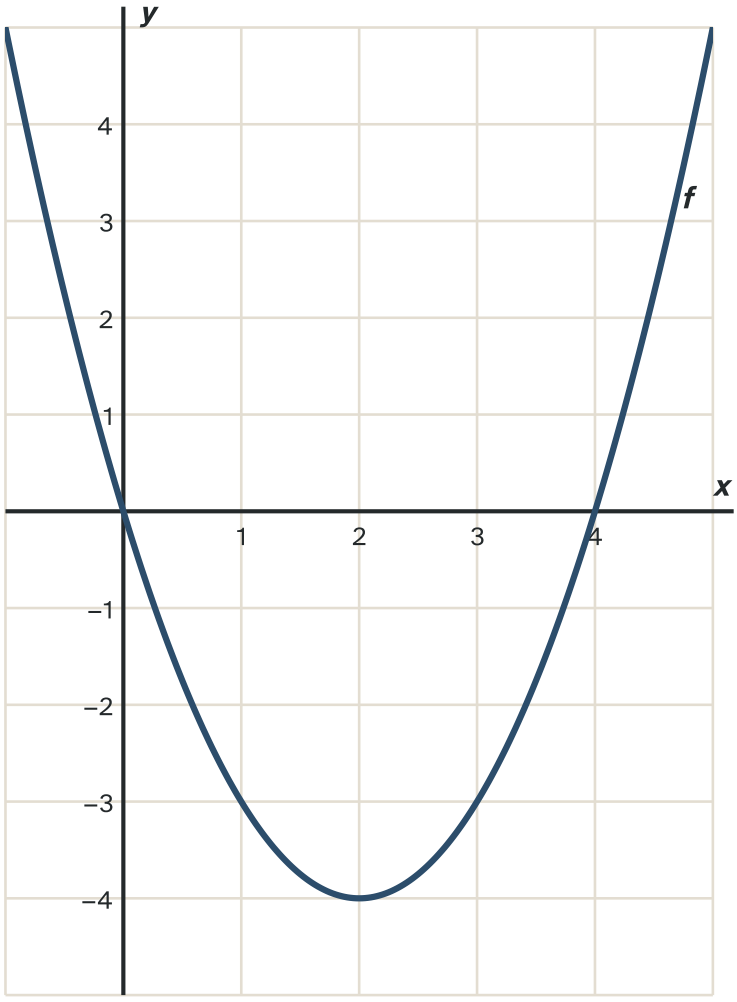
b) $f(x) = 2x^5$: $f'(x) =$ _____ ☐ $2x^4$ ☐ $5x^4$ ☐ $10x^4$

c) $f(x) = x^2 \cdot (x + 2) = x^3 + 2x^2$: $f'(x) =$ _____ ☐ $3x^2 + 2x$ ☐ $2x + 2$ ☐ $3x^2 + 4x$

d) $f(x) = 0{,}5x^4$: $f'(x) =$ _____ ☐ $4x^3$ ☐ $2x^3$ ☐ $0{,}5x^3$

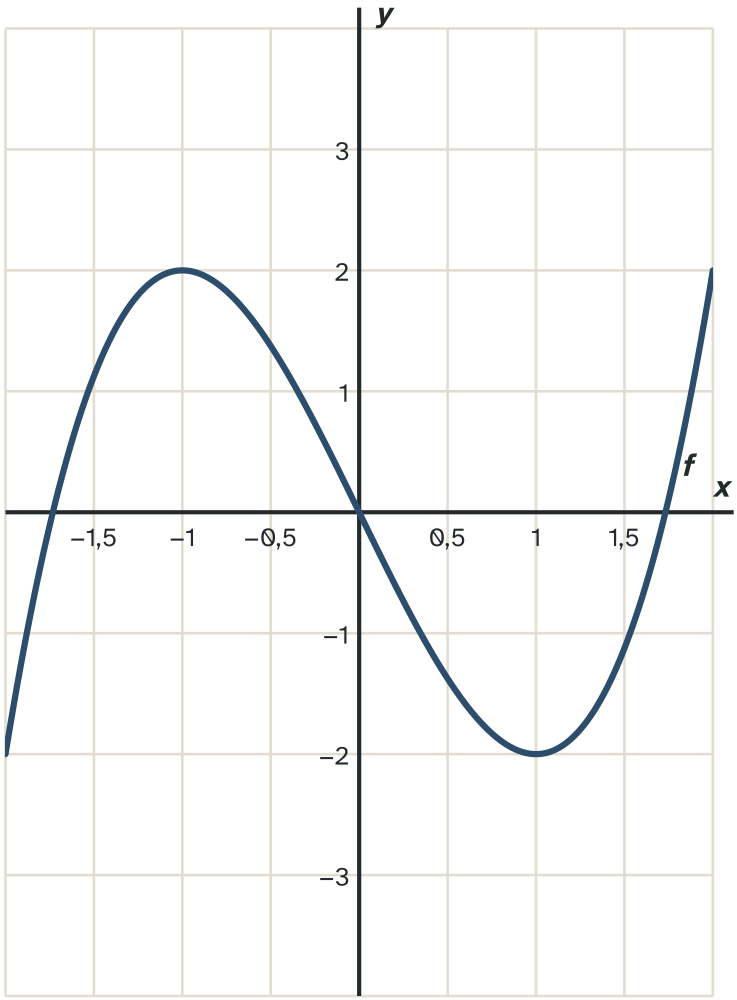
7 **Lies aus dem Graphen von f ab, wo f′ den Wert 0 hat.**

a)



f′(x) = 0 bei x = ☐

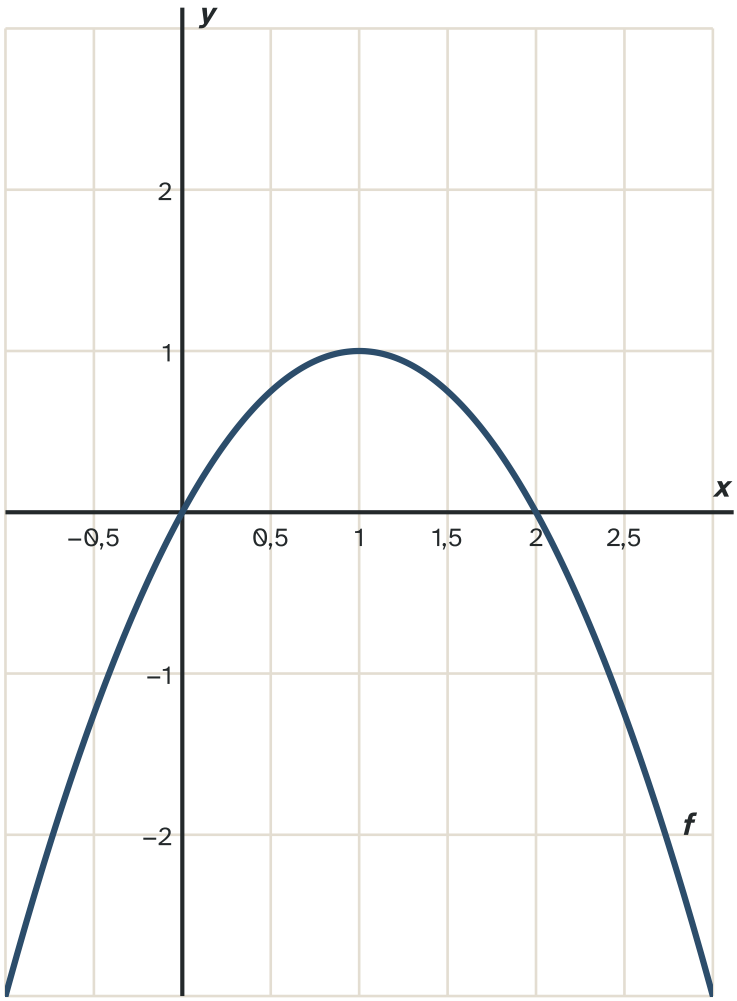
b)



f′(x) = 0 bei x =

☐ und x = ☐

c)



$f'(x) = 0$ bei $x =$ ☐

●●● Plus

Tangenten, Begründungen, Beweis

8 **Bestimme die Tangente im Punkt $(x_0 \mid f(x_0))$. Rechne $f(x_0)$, $f'(x_0)$ und b aus.**

a) $f(x) = x^3 - 3x$, $x_0 = 2$: Tangente $y =$ _____ $\cdot x +$ _____

b) $f(x) = x^2 + x$, $x_0 = 1$: Tangente $y =$ _____ $\cdot x +$ _____

c) $f(x) = x^4$, $x_0 = 1$: Tangente $y =$ _____ $\cdot x +$ _____

d) $f(x) = 2x^3 - x$, $x_0 = 1$: Tangente $y =$ _____ $\cdot x +$ _____

9 **Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe die richtige Fassung auf.**

a) Die Ableitung von x^3 ist $3x^3$. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

b) Liegt der Graph von f' unter der x-Achse, dann fällt der Graph von f. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

c) Zu einem Graphen von f' gibt es genau einen passenden Graphen von f. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

d) Die Ableitung von $3x^4$ ist $4x^3$. ☐ **stimmt** ☐ **stimmt nicht**

10 Rechne und begründe.

a) Modell: Das Volumen in einem Becken ist $V(t) = -t^2 + 8t$ in Litern (t in min). Dann ist $V'(t) = -2t + 8$. Wie schnell ändert sich V bei $t = 1$? Wann ist die momentane Änderungsrate 0?

Antwort:

b) Beweise die Faktorregel: Zeige $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$ mit dem Differenzenquotienten.

Antwort:

c) Skizziere in Worten einen Graphen von f, wenn $f'(x) = 2x - 4$ gilt.

Antwort:

Kannst du das schon?

Kreuze an, wie sicher du dich fühlst. Hier gibt es kein Richtig oder Falsch.

Ich kann …	sicher	fast	noch nicht
Ich erkläre die Ableitungsfunktion als Funktion der Steigungen.	☐	☐	☐
Ich leite Potenzfunktionen und Summen mit den Regeln ab.	☐	☐	☐
Ich lese aus dem Graphen von f Eigenschaften von f′ ab und umgekehrt.	☐	☐	☐
Ich begründe eine Ableitungsregel.	☐	☐	☐

Tipp: Bei „noch nicht“ schau dir „Kurz erklärt“ vorne im Heft noch einmal an oder scanne den Code auf dem Deckblatt. Dann probierst du die Aufgaben noch einmal.

Lösungen

Erst selbst rechnen, dann vergleichen. Bei den Rechenaufgaben steht der Rechenweg dabei.

●○○ Basis: Ableitungsfunktion und Potenzregel

1 **Leite mit der Potenzregel ab und berechne die Steigung.**

a) $f(x) = x^3$: $f'(2) = 12$

b) $f(x) = x^4$: $f'(2) = 32$

c) $f(x) = x^5$: $f'(2) = 80$

d) $f(x) = x^3$: $f'(-1) = 3$

e) $f(x) = x^4$: $f'(-1) = -4$

2 **Für $f(x) = x^2$ ist $f'(x) = 2x$. Berechne $f'(x)$.**

a) $f'(-3) = -6$

b) $f'(0) = 0$

c) $f'(2) = 4$

d) $f'(0{,}5) = 1$

3 **Kreuze an.**

a) **Steigung**

→ Das ist die Bedeutung von f'.

b) **steigt**

→ Positive Steigung heißt steigender Graph.

c) **1**

→ Die Gerade $y = x$ hat überall die Steigung 1.

d) **0**

→ Eine waagerechte Gerade hat die Steigung 0.

e) $n \cdot x^{n-1}$

→ Der Exponent wird Faktor und sinkt um 1.

●●○ Standard: Regeln anwenden, Graphen lesen

4 **Leite gliedweise ab und berechne die Steigung.**

a) $f(x) = x^3 - 4x$: $f'(2) = 8$

b) $f(x) = 2x^3 - x^2$: $f'(1) = 4$

c) $f(x) = x^4 - 2x^3$: $f'(1) = -2$

d) $f(x) = 5x^2 - 3x + 7$: $f'(2) = 17$

5 **Löse $f'(x) = 0$. Trage die Stellen ein, bei zwei Stellen zuerst die kleinere.**

a) $f(x) = x^2 - 6x$: $f'(x) = 2x - 6$. Stelle: 3

b) $f(x) = x^3 - 3x$: $f'(x) = 3x^2 - 3$. Stellen: -1 und 1

c) $f(x) = x^3 - 12x$: $f'(x) = 3x^2 - 12$. Stellen: -2 und 2

d) $f(x) = x^4 - 4x$: $f'(x) = 4x^3 - 4$. Stelle: 1

6 **Wähle die richtige Ableitung.**

a) $12x^2 - 1$

→ Faktor $4 \cdot 3 = 12$, die Konstante fällt weg.

b) $10x^4$

→ $2 \cdot 5 = 10$, Exponent 4.

c) $3x^2 + 4x$

→ Gliedweise: $3x^2$ und $4x$.

d) $2x^3$

→ $0{,}5 \cdot 4 = 2$.

7 **Lies aus dem Graphen von f ab, wo f′ den Wert 0 hat.**

a) 2 **b)** –1 und 1 **c)** 1

●●● Plus: Tangenten, Begründungen, Beweis

8 **Bestimme die Tangente im Punkt $(x_0 \mid f(x_0))$. Rechne $f(x_0)$, $f'(x_0)$ und b aus.**

a) $f(x) = x^3 - 3x$, $x_0 = 2$: Tangente $y = 9 \cdot x + -16$

b) $f(x) = x^2 + x$, $x_0 = 1$: Tangente $y = 3 \cdot x + -1$

c) $f(x) = x^4$, $x_0 = 1$: Tangente $y = 4 \cdot x + -3$

d) $f(x) = 2x^3 - x$, $x_0 = 1$: Tangente $y = 5 \cdot x + -4$

9 **Stimmt der Satz? Wenn nicht, schreibe die richtige Fassung auf.**

a) Stimmt nicht. Richtig: Der Exponent sinkt um 1: $(x^3)' = 3x^2$.

b) Stimmt.

c) Stimmt nicht. Richtig: Verschiebt man f nach oben oder unten, bleibt f′ gleich. Es gibt viele passende Graphen.

d) Stimmt nicht. Richtig: Der Faktor 3 bleibt stehen: $(3x^4)' = 12x^3$.

10 **Rechne und begründe.**

a) Bei t = 1: 6 L/min. Die Rate ist 0 bei t = 4 min.

→ $V'(1) = -2 + 8 = 6$.

→ $-2t + 8 = 0$ ergibt $t = 4$.

b) Im Zähler wird c ausgeklammert und bleibt vor dem Grenzwert stehen.

→ $(c \cdot f(x + h) - c \cdot f(x)) / h = c \cdot (f(x + h) - f(x)) / h$.

→ Grenzwert: $c \cdot f'(x)$.

c) f fällt bis x = 2, hat dort einen Tiefpunkt und steigt danach.

→ $f'(2) = 0$.

→ Links $f' < 0$, rechts $f' > 0$.